Introducere în teoria condensatelor Bose-Einstein

A.I. Nicolin şi M.C. Raportaru

Cuprins

Liminar **5**

1 Introducere **7**
1.1 Condensate Bose-Einstein în gaze atomice 10
1.2 Ecuaţia Gross-Pitaevskii 13
1.2.1 Soluţii tip soliton 17
1.3 Starea fundamentală a unui condensat Bose-Einstein 22
1.3.1 Regimul de densitate joasă 22
1.3.2 Regimul Thomas-Fermi 23
1.3.2.1 Corecţii la aproximaţia Thomas-Fermi . . . 25
1.3.3 Condensate încărcate în reţele optice 27

2 Abordări analitice ale ecuației Gross-Pitaevskii **31**
2.1 Calcule variaţionale 32
2.1.1 Calcul variaţional bazat pe funcţii Gaussiene 32
2.1.2 Calcul variaţional bazat pe funcţii q-Gaussiene . . . 34
2.2 Calcule hidrodinamice 37
2.3 Teoria stabilităţii 39

3 Modele discrete **43**
3.1 Stări staţionare 46
3.2 Stabilitatea stărilor staţionare 49
3.2.1 Stări Bloch 50
3.2.2 Stări de perioadă dublă 52

4 Ecuațiile Schrödinger nepolinomiale **55**
4.1 Regimul de densitate joasă 55
4.2 Regimul de densitate înaltă 58
4.2.1 Condensate cuasi-unidimensionale 58
4.2.2 Condensate cuasi-bidimensionale 61

5 Unde de densitate **65**
5.1 Tratament variaţional 66
5.2 Ecuaţia Mathieu 71
5.2.1 Teorema Floquet 72
5.2.2 Coeficienţi caracteristici 74
5.3 Rezultate numerice 76

Liminar

Volumul de faţă reprezintă o introducere generală în teoria condensatelor Bose-Einstein şi acoperă, pe de o parte, tematica devenită standard, fiind incluse, pe de altă parte, subiecte extrem de recente legate de activitatea de cercetare a autorilor. Primele trei capitole trec în revistă condensarea Bose-Einstein în gaze atomice, ecuaţia Gross-Pitaevskii şi soluţiile sale de tip soliton, proprietăţile stării de bază a condensatelor Bose-Einstein, metodele variaţionale şi hidrodinamice folosite în studiul dinamicii condensatelor şi variantele discrete ale ecuaţiei Gross-Pitaevskii utilizate în cazul condensatelor încărcate în reţele optice. Spre deosebire de primele trei capitole, ultimele două prezintă rezultatele recente ale autorilor în domeniul ecuaţiilor Schrödinger nepolinomiale care descriu dinamica condensatelor puternic alungite (în formă de ţigaretă) şi a celor puternic turtite (în formă de clătită) şi formarea undelor de densitate în condensate supuse la excitaţii parametrice.

Lucrarea de faţă încununează munca autorilor în domeniul dinamicii neliniare a condensatelor Bose-Einstein, fiind deopotrivă *i.*) un curs introductiv accesibil studenţilor din ultimul an al studiilor de licenţă şi primul an al studiilor de Master şi *ii.*) un punct de pornire pentru studenţii interesaţi de elaborarea unei disertaţii asupra condensatelor Bose-Einstein sau, într-un cadru mai larg, asupra dinamicii neliniare a fluidelor cuantice. Capitolele volumului sunt în bună măsură independente unele de altele, numărul trimiterilor de la un capitol la altul fiind redus la minimum. Bibliografia este generală şi cuprinde în principal articole, numărul manualelor dedicate exclusiv condensatelor Bose-Einstein fiind extrem de redus.

Prima parte a acestui volum are la bază tezele de doctorat ale autorilor, în timp ce partea a doua a volumului are la bază articolele publicate de autori de-a lungul ultimilor ani în reviste prestigioase ca Physical Review A, Physical Review E, Physica A, etc. Volumul reflectă în acelaşi timp colaborările autorilor cu Prof. Univ. Dr. Ricardo CARRETERO-GONZÁLEZ

de la Departamentul de Matematică şi Statistică al Universităţii din California, San Diego, şi Conf. Univ. Dr. Antun BALAŽ de la Institutul de Fizică din Belgrad şi fructuoasa colaborare cu Prof. Univ. Dr. Virgil BĂRAN, directorul Centrului de Fizică Teoretică (CFT) al Facultăţii de Fizică a Universităţii Bucureşti în cadrul căruia autorii activează.

1 Introducere

Înţelegerea curentă a temperaturilor scăzute porneşte de la experienţa noastră de zi cu zi cu lumea exterioară. Chiar dacă temperatura de îngheţ este considerată scăzută de către marea majoritate, comportamentul sistemelor fizice aflate la această temperatură este încă unul clasic, fiind necesare temperaturi cu mult mai scăzute pentru a putea observa procese fizice calitativ diferite de cele clasice.

Istoria fenomenelor fizice observate la temperaturi foarte joase este una pasionantă şi menţionăm în acest sens observarea supraconductivităţii în 1911, în 1913 fiindu-i acordat premiul Nobel lui Heike Kamerlingh Onnes pentru investigaţiile sale asupra proprietăţilor materiei la temperaturi scăzute, care au dus, printre altele, la producerea heliului lichid, alaturi de obţinerea a superfluidităţii ^{4}He în 1938 şi cea a ^{3}He în 1972.

Apariţia în 1980 a proceselor de răcire în cadrul cărora sunt folosite fascicule laser marchează o nouă etapă în istoria fizicii temperaturilor scăzute şi reprezintă primul pas semnificativ în vederea obţinerii unui condensat Bose-Einstein atomic format dintr-un gaz bosonic diluat răcit la temperaturi de ordinul sutelor şi zecilor de nanokelvini.

Obţinute experimental pentru prima dată în 1995 de către Eric Cornell şi Carl Weiman de la University of Colorado, Boulder, şi Wolfgang Ketterle de la Massachusetts Institute of Technology, condensatele Bose-Einstein au reprezentat multă vreme "Sfântul Graal" al fizicii experimentale. Prezicerea teoretică a condensării Bose-Einstein de către Satyendra Nath Bose [9] şi Albert Einstein precede cu şapte decenii realizarea experimentală a acestei stări, existând foarte puţine semne în această perioadă care să indice efervescenţa ştiinţifică actuală.

Creşterea explozivă a interesului asupra condensatelor Bose-Einstein este evidenţiată atât de numărul mare de articole publicate în domeniu, cât şi de diversitatea cercetătorilor atraşi de subiect. Astfel, fizicieni specializaţi în fizică nucleară, fizică atomică, optică cuantică, optică neliniară, fizica materiei condensate ş.a.m.d. se dedica studiului condensatelor Bose-

Einstein atraşi de flexibilitatea experimentală a sistemelor în care sunt obţinute acestea şi de acurateţea modelelor teoretice folosite în descrierea cantitativă a proprietăţilor acestor condensate.

La nivelul cel mai elementar de înţelegere, condensarea Bose-Einstein reprezintă ocuparea *macroscopică* a stării cuantice de energie minimă. Numărul mic de atomi din condensatele Bose-Einstein de la mijlocul anilor '90 a ridicat uneori semne de întrebare asupra obţinerii acestei noi stări a materiei (deoarece nu era evident din rezultatele experimentale că starea de energie minimă este ocupată macroscopic) şi nu este lipsit de importanţă faptul că dintre cele trei grupuri care au lucrat în vederea obţinerii condensării Bose-Einstein doar două au primit premiul Nobel.

Când un gaz bosonic este răcit sub o temperatură critică T_c, o mare parte din bosoni condensează în starea cuantică cea mai joasă. Atomii la temperatura T şi cu masa m pot fi consideraţi pachete cuantice de undă care au o întindere spaţială de ordinul lungimii de undă termale de Broglie $\lambda_{dB} = (2\pi\hbar/mk_BT)^{1/2}$. Valorea lui λ_{dB} reprezintă imprecizia în poziţie asociată cu distribuţia impusului termic şi creşte cu descreşterea temperaturii. Când atomii sunt răciţi până la punctul în care λ_{dB} este comparabil cu separarea interatomică, pachetele de undă se suprapun şi gazul începe să devină o "supă cuatincă" de particule care nu pot fi distinse. În acel moment bosonii suferă o tranziţie de fază în sensul mecanicii cuantice şi formează un condensat Bose-Einstein (figura 1.1). Dacă atomii sunt fermioni, răcirea aduce treptat gazul aproape de o "mare Fermi", stare în care câte un fermion ocupă un nivel energetic pornind de la nivelul de energie minimă.

Descrierea precedentă este departe de a fi corectă, în ciuda aparentei simplităţi. Să ne gândim doar la faptul că, pe măsură ce descreştem temperatura, gazul trece, în principiu, printr-un proces de condensare clasică. Aceasta este însă evitată prin folosirea unor gaze de densităţi foarte scăzute, cam de o sută de mii de ori mai puţin dense decât densitatea aerului. În aceste condiţii timpul de formare a moleculelor devine de ordinul secundelor şi minutelor, acesta fiind proporţional cu inversul pătratului densităţii (a se vedea Ref. [65] pentru o discuţie detaliată). Vedem aşadar că principala problemă experimentală a fost aceea de a identifica un sistem atomic care putea rămâne gazos la temperaturi extrem de joase. Steve Chu spunea de altfel în 1994: "Pun pariu că Natura ascunde condensarea Bose-Einstein de noi. În ultimii 15 ani a făcut o treabă bună" [17].

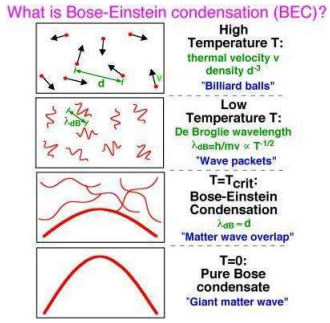

Figura 1.1: Formarea condensatelor Bose-Einstein. La temperaturi ridicate, un gaz bosonic se comportă clasic, asemeni unui "sistem de bile de biliard". La temperaturi scăzute atomii pot fi consideraţi pachete cuantice de undă care au o întindere spaţială de ordinul lungimii de undă termale de Broglie. Atunci când gazul este răcit sub o temperatură critică T_c, o mare parte din atomi condensează în starea cuantică cea mai joasă. La $T = 0$ toţi bosonii sunt în starea de energie minimă şi formează un condensat Bose-Einstein perfect. Imaginea este preluată din Ref. [39].

Pentru răcirea unui gaz bosonic în vederea formării unui condensat Bose-Einstein sunt folosite în mod curent două metode distincte: răcirea cu laser şi răcirea prin evaporare. Răcirea prin evaporare este folosită în partea de prerăcire a gazului folosind un fascicol laser ai cărui fotoni preiau energie de la atomii "fierbinţi" în cadrul ciocnirilor foton-atom. Cea de-a doua metodă, răcirea prin evaporare, este folosită când gazul a fost deja prerăcit şi poate fi confinat într-o capcană magnetică. În lipsa capcanei, atomii deja prerăciţi s-ar lipi de suprafaţa microcontainerului în care sunt depozitaţi. Capcane magnetice similare celor folosite pentru condensatele Bose-Einstein sunt utilizate pentru confinarea plasmelor care nu sunt prea fierbinţi.

Principiul răcirii prin evaporare este unul extrem de intuitiv, aproape clasic. Astfel, aşa cum dintr-o ceaşcă aburindă de ceai sau de cafea se îndepărtează prin evaporare cele mai fierbinţi molecule, tot aşa dintr-un condensat Bose-Einstein vor "evada" doar acei atomi care au energie (şi deci temperatură) suficient de mare pentru a putea depăşi potenţialul extern. Toate schemele de răcire prin evaporare se bazează pe scăderea progresivă, foarte lentă, a tăriei capcanei magnetice ce permite celor mai fierbinţi atomi să iasă din capcana magnetică, iar celor rămaşi să atingă echilibrul

termic la o temperatură mai scăzută. Pentru acest ultim pas este necesar ca scăderea tăriei capcanei magnetice să fie una foarte înceată astfel încât după evacuarea atomilor fierbinţi cei rămaşi să aibă timpul necesar de a reatinge echilibrul termic.

În mod curent temperaturile la care se observă condensarea Bose-Einstein sunt de ordinul micro- şi nanokelvinilor iar densităţile sunt de ordinul 10^{13}-10^{15} atomi pe centimetru cub. Funcţie de simetria capcanei magnetice condensatul poate să fie sferic, puternic turtit (în formă de disc) sau puternic alungit (în formă de ţigaretă). Ciclul de răcire necesar producerii unui condensat Bose-Einstein dura câteva minute la mijlocul anilor '90, în timp ce acum, odată cu automatizarea tuturor proceselor, durează câteva secunde.

1.1 Condensate Bose-Einstein în gaze atomice

Prima problemă asociată condensării Bose-Einstein în gaze atomice este aceea a estimării temperaturii de tranziţie şi a numărului de atomi din condensat. Cantităţile relevante pentru această problemă sunt masa m a particulei, numărul de particule pe unitatea de volum (notat de obicei cu n) şi constanta lui Planck. Combinaţia $\hbar^2 n^{2/3}/m$ reprezintă o energie, aşa că valoarea acesteia împărţită la constanta Boltzman k_B reprezintă o temperatură, astfel încât temperatura de tranziţie este scrisă în mod convenţional sub forma

$$T_c = C\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m k_B} \tag{1.1}$$

unde C este un factor numeric. Putem înţelege calitativ formula de mai sus pornind de la faptul că tranziţia spre starea condensată are loc atunci când unda de Broglie este comparabilă cu distanţa medie dintre două particule. Astfel, folosind

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2} \tag{1.2}$$

şi faptul că distanţa medie dintre particule este de ordinul lui $n^{-1/3}$ obţinem formula (1.1)

Un calcul mai rafinat asupra temperaturii de tranziţie (a se vedea discuţia detaliată din Ref. [65], capitolul 2) poate fi realizat pornind de la distribuţia Bose

$$f^0\left(\epsilon_v\right) = \frac{1}{\exp\left[\left(\epsilon_\nu - \mu\right)/k_B T\right] - 1} \tag{1.3}$$

care ne arată ocuparea medie a stării cu energie ϵ_ν. Potenţialul chimic μ care apare în ecuaţia de mai sus asigură conservarea numărului de particule şi se determină (de cele mai multe ori numeric) ca funcţie de numărul de particule şi de temperatura critică. Astfel

$$N_p = \int_0^\infty g\left(\epsilon\right) f^0\left(\epsilon\right) d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g\left(\epsilon\right) d\epsilon}{\exp\left[\left(\epsilon_\nu - \mu\right)/k_B T\right] - 1}, \tag{1.4}$$

unde $g\left(\epsilon\right)$ este densitatea de stări care arată numărul stărilor cu energia între ϵ şi $\epsilon + d\epsilon$. Se poate arăta relativ uşor că densitatea de stări poate fi scrisă la modul general sub forma

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha - 1}, \tag{1.5}$$

unde C_α şi α sunt constante care depind de dimensionalitatea sistemului analizat şi de tipul potenţialului extern care confinează bosonii. Pentru un gaz tridimensional liber ce ocupă un volum V avem

$$g\left(\epsilon\right) = \frac{V m^{3/2} \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \tag{1.6}$$

iar în general $g(\epsilon) \propto \epsilon^{(d/2-1)}$ unde d reprezintă numărul de dimensiuni. În mod similar se observă că pentru un gaz de bosoni confinaţi de o capcană magnetică de tipul

$$V\left(x_1, ..., x_d\right) = \sum_{j=1}^{d} \frac{m}{2} \omega_j^2 x_j^2 \tag{1.7}$$

obţinem

$$g\left(\epsilon\right) = \frac{\epsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{j=1}^{d} \hbar\omega_j}. \tag{1.8}$$

Cunoscând densitatea stărilor putem calcula numărul de particule din stările excitate, anume

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f^0(\epsilon). \tag{1.9}$$

Numărul de particule din stările excitate atinge valoarea maximă pentru $\mu = 0$, temperatura critică putând fi calculată din condiţia ca numărul total de particule să fie egal cu cel din stările excitate, adică

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{\exp(\epsilon/kT_c) - 1}. \tag{1.10}$$

Integrala precedentă se poate calcula cu usurinţă folosind variabila adimensională $x = \epsilon/kT_c$, obţinând în cele din urmă

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)]^{1/\alpha}}, \tag{1.11}$$

unde funcţia zeta Riemann este $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ iar funcţia gamma este $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} \exp(-x)$.

În obţinerea formulei precedente am presupus că nivelele energetice formează un continuum, putând astfel să înlocuim sumarea discretă a nivelelor energetice cu o integrală. Această presupunere este incorectă pentru nivelele de energie joasă, însă oferă o bună aproximaţie pentru nivelele excitate.

Potenţialele relevante experimental sunt cele din ecuaţia (1.7) (cu $d = 3$), caz în care obţinem că temperatura critică poate fi scrisă sub forma

$$k_B T_c = \frac{\hbar\bar{\omega} N_p^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0.94 \hbar\bar{\omega} N_p^{1/3}, \tag{1.12}$$

unde $\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$.

Cu rezultatele precedente putem determina uşor fracţiunea necondensată din gazul atomic. Astfel, pornind de la numărul de atomi în stări excitate

$$N_{ex} = C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)(kT)^\alpha \tag{1.13}$$

şi folosind formula temperaturii critice din ecuaţia (1.12) obţinem

$$N_{ex} = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\alpha} \tag{1.14}$$

de unde putem deduce uşor numărul de particule din condensat, anume

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T) = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\alpha}\right]. \tag{1.15}$$

Pentru un gaz liber ce ocupă un volum V densitatea particulelor din starea condensată este dată de

$$n_{ex} = \frac{N_{ex}}{V} = \zeta(3/2)\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}, \tag{1.16}$$

în timp ce pentru un gaz confinat de un potenţial armonic tridimensional de forma celui din ecuaţia (1.7) se observă uşor că numărul de particule din starea condensată este dat de

$$N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3}\right]. \tag{1.17}$$

1.2 Ecuaţia Gross-Pitaevskii

Ecuaţia standard folosită în studiul teoretic al condensatelor Bose-Einstein a fost propusă la începutul anilor '60 de către Eugene Gross şi Lev Pitaevskii în două articole independente publicate în "Nouvo Cimento" şi "Sov. Phys. JEPT" (a se vede Refs. [31, 67]). Ecuaţii similare din punct de vedere matematic sunt folosite în descrierea dinamicii trenurilor de undă monocromatice ce se propagă în medii uşor neliniare, în descrierea dinamicii uşor neliniare a undelor ce se propagă la suprafaţa unui lichid şi a oscilaţiilor Langmuir (numite de asemenea şi unde Langmuir) care apar în plasme nemagnetizate sau magnetizate uşor. Însă cea mai celebră ecuaţie înrudită cu ecuaţia Gross-Pitaevskii este ecuaţia Ginzburg-Landau folosită în anii '50 în modelele de supraconductivitate [80].

Ecuaţia Gross-Pitaevskii este o ecuaţie Schrödinger neliniară ce descrie funcţia de undă macroscopică a unui gaz condensat în sens Bose-Einstein. Pentru derivarea ei cel mai convenabil este să pornim de la Hamiltonianul

multi-particulă a N bosoni ce interacţionează scris în a doua cuantificare. Considerând m masa unui boson şi $V_{ext}(\mathbf{r})$ potenţialul în care aceştia sunt confinaţi iar $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ potenţialul de interacţie între doi bosoni, Hamiltonianul poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d\mathbf{r}\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})\right]\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\\ &+\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}',t)V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}',t)\hat{\psi}(\mathbf{r},t), \quad (1.18)\end{aligned}$$

unde $\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$ şi $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ sunt operatori bosonici de câmp, de anihilare şi respectiv creare.

Folosind ecuaţia Heisenberg

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=\left[\hat{\psi},\hat{H}\right] \quad (1.19)$$

avem:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})+\int d\mathbf{r}'\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}',t)\,V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\,\hat{\psi}(\mathbf{r}',t)\right)\hat{\psi}. \quad (1.20)$$

Subliniem că această ecuaţie este similară ecuaţiei Schrödinger, însă $\hat{\psi}$ este un operator de câmp aşa că pentru obţinerea ecuaţiei Schrödinger propriu-zise vom descompune operatorul de câmp sub forma

$$\hat{\psi}(\mathbf{r},t)=\psi(\mathbf{r},t)+\delta\hat{\psi}(\mathbf{r},t), \quad (1.21)$$

unde

$$\psi(\mathbf{r},t)=\left\langle\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\right\rangle \quad (1.22)$$

este funcţia de undă a condensatului şi reprezintă valoarea probabilă a operatorului de câmp iar $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ descrie partea necondensată a gazului. Pentru temperaturi considerabil mai mici decât temperatura critică putem neglija ultimul termen din ecuaţia (1.21).

Pe lângă această simplificare vom presupune de asemenea că interacţia dintre particule este interacţie de contact, astfel încât $V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=U\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ unde $U=4\pi\hbar^2a/m$ iar a este lungimea de împrăştiere între două particule.

Înlocuind în ecuaţia (1.20) $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ cu $\psi(\mathbf{r},t)$ şi $V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ cu $U\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ se obţine

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})+U|\psi|^2\right)\psi \tag{1.23}$$

care este ecuaţia Gross-Pitaevskii dependentă de timp.

Se observă relativ uşor că Lagrangianul clasic asociat ecuaţiei (1.23) (adică acela scris folosind funcţia de undă şi nu operatorii de câmp) este dat de

$$S=\int dtd\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r},t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\nabla^2-V(\mathbf{r})-\frac{UN|\psi(\mathbf{r},t)|^2}{2}\right)\psi(\mathbf{r},t), \tag{1.24}$$

ecuaţia Gross-Pitaevskii propriu-zisă fiind obţinută minimizând S funcţie de ψ^*, adică

$$\frac{\partial S}{\partial\psi^*}=0. \tag{1.25}$$

Pentru a obţine forma independentă de timp a ecuaţiei Gross-Pitaevskii putem folosi două abordări. Prima abordare porneşte de la eliminarea termenului $\partial\psi/\partial t$ şi introducerea unui multiplicator Lagrange μ (numit de obicei potenţial chimic), care asigură conservarea numărului de particule, adică:

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi+V_{ext}(\mathbf{r})\psi+U|\psi|^2\psi=\mu\psi. \tag{1.26}$$

Cea de-a doua abordare are la bază descompunerea funcţiei de undă sub forma

$$\psi(\mathbf{r},t)=\psi_0(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right) \tag{1.27}$$

de unde rezultă din nou ecuaţia (1.26).

Ecuaţia Gross-Pitaevskii se poate obţine şi printr-o abordare cuasi-clasică folosind faptul că la energii joase interacţia efectivă dintre două particule este constantă în spatiul momentelor, adică $U=4\pi\hbar^2a/m$, ceea ce înseamnă o interacţie de tip funcţie delta în spaţiul real, putând scrie aşadar

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + V(\mathbf{r}_j) \right] + U_0 \sum_{j<n} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n). \tag{1.28}$$

Energia stării condensate este dată de

$$\mathcal{E}(\phi) = N \int \left[d\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(r) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \tag{1.29}$$

unde $\phi(\mathbf{r})$ este funcţia uniparticulă şi N numărul de bosoni. Mai sus am considerat că toţi atomii sunt în aceeaşi stare uniparticulă a cărei funcţie de undă este ϕ. Acest lucru se bazează pe aproximaţia Hartree-Fock cu ajutorul căreia putem scrie starea multi-particulă sub forma

$$\psi(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = \prod_{j=1}^{N} \phi(\mathbf{r}_j). \tag{1.30}$$

Prin urmare, funcţionala energiei oferă o descriere de câmp mediu a condensatului. Subliniem că termenul $|\phi(\mathbf{r})|^4$ al funcţionalei energiei Gross-Pitaevskii vine din interacţia între particule. În loc de funcţia de undă uni-particulă se obişnuieşte să se lucreze cu funcţia de undă a condensatului (sau parametrul de ordine aşa cum este numit câteodată), definit ca $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r})$. Prin urmare, densitatea bosonilor este dată de $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ iar ecuaţia (1.29) devine

$$\mathcal{E}(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(r) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \tag{1.31}$$

unde am folosit că $N - 1 \approx N$. Stările staţionare ale gazului condensat Bose-Einstein sunt obţinute din ecuaţia

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \psi^*} = 0 \tag{1.32}$$

unde $\mathcal{G} = \mathcal{E} - \mu N$. Multiplicatorul Lagrange μ a fost introdus pentru a asigura numărul constant de particule. Calculând explicit derivata funcţională a lui $\mathcal{G}$ în raport cu ψ^* rezultă:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi^2(\mathbf{r}) + U_0\psi(\mathbf{r})\left|\psi(\mathbf{r})\right|^2 = \mu\psi(\mathbf{r}). \tag{1.33}$$

Subliniem că ecuaţia Gross-Pitaevskii este o ecuaţie neliniară cu derivate parţiale, rezolvarea ei numerică necesitând importante resurse de calcul. Pentru simplificarea investigaţiilor asupra dinamicii condensatelor Bose-Einstein se deosebesc de obicei două regimuri calitativ diferite: regimul de densitate scăzută şi regimul de densitate înaltă (numit şi Thomas-Fermi). În primul regim condensatul este uşor neliniar iar ecuaţia Gross-Pitaevskii poate fi rezolvată eficient folosind metode variaţionale ce au la bază o funcţie de undă test (ansatz) înrudită cu soluţia ecuaţiei Schrödinger liniare, în timp ce în al doilea regim este convenabilă utilizarea modelelor hidrodinamice şi a calculelor variaţionale ce folosesc funcţii test q-Gaussiene.

1.2.1 Soluţii tip soliton

O proprietate aparte a soluţiilor ecuaţiei Gross-Pitaevskii este existenţa unor soluţii intrinsec neliniare de tip soliton. Acestea pot fi separate cu uşurinţă în soluţii de tip soliton luminos ("bright soliton") şi soluţii de tip soliton întunecat ("dark soliton"). Solitonii luminoşi corespund unei structuri puternic localizate, în timp ce solitonii întunecaţi prezintă un minim în funcţia de densitate a condensatului fix în centrul capcanei magnetice. Cea mai simplă formă a acestor structuri neliniare (pentru un condensat unidimensional neconfinat într-o capcană magnetică) este dată de

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2\xi}}\right) \tag{1.34}$$

pentru solitonul luminos, unde $\xi = \hbar/\sqrt{2mn_0U}$ este lungimea de coerenţă şi ψ_0 valoarea asimptotică a funcţiei de undă la infinit, în timp ce pentru solitonul întunecat avem

$$\psi(x,t) = \psi(0)\exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right)\frac{1}{\cosh\left(x\sqrt{\frac{2m\left|\mu\right|}{\hbar^2}}\right)}, \tag{1.35}$$

unde

$$\mu = \frac{1}{2} U \left|\psi\left(0\right)\right|^2 . \tag{1.36}$$

Există de asemenea şi soluţii periodice de tipul trenurilor de solitoni, formula matematică care îi guvernează pe aceştia fiind însă mai complexă. Cea mai completă abordare analitică a trenurilor de solitoni este introdusă într-o serie de articole de Bronski *et al.* [11, 12, 13] fiind demonstrat că pentru un potenţial extern periodic de forma

$$V(x) = V_0 \mathrm{sn}^2(x,k), \tag{1.37}$$

unde sn este funcţia Jacobi eliptică de tip sinus, se pot determina câteva clase de soluţii periodice de tip soliton ale ecuaţiei Gross-Pitaevskii descopunând funcţia de undă sub forma:

$$\psi(x,t) = r(x)\exp(-i\omega t + i\theta(x)) \tag{1.38}$$

unde funcţia de densitate $r(x)$ este dată de:

$$\begin{aligned} r_1^2(x) &= A\mathrm{sn}^2(x,k) + B, & (1.39)\\ r_1^2(x) &= A\mathrm{cn}(x,k) + B, & (1.40)\\ r_3^2(x) &= A\mathrm{dn}(x,k) + B. & (1.41) \end{aligned}$$

Ecuaţia Gross-Pitaevskii devine echivalentă cu

$$\omega r(x) = -\frac{1}{2}\ddot{r}(x) + \frac{1}{2} r(\dot{\theta}(x))^2 + r^3(x) - V_0 \mathrm{sn}^2(x,k) r(x) \tag{1.42}$$

şi

$$0 = 2r'(x)\dot{\theta}(x) + r(x)\ddot{\theta}(x), \tag{1.43}$$

cu

$$\theta(x) = c\int_0^x \frac{1}{r^2(x')} dx', \tag{1.44}$$

de unde obţinem cu uşurinţă că

$$\omega r(x) = \frac{c^2}{2r^3(x)} - \frac{\ddot{r}(x)}{2} + r^3(x) - V_0 \mathrm{sn}^2(x,k) r(x) \qquad (1.45)$$

sau, într-o formă echivalentă,

$$\omega r^4(x) = \frac{c^2}{2} - \frac{\ddot{r}(x) r^3(x)}{2} + r^6(x) - V_0 \mathrm{sn}^2(x,k) r^4(x). \qquad (1.46)$$

Pentru $r_1^2(x)$ dat de ecuaţia (1.39) putem rescrie ecuaţia precedentă sub forma

$$\begin{aligned} E = & \frac{c^2}{2} - V_0 A^2 \mathrm{sn}^6 - V_0 B \mathrm{sn}^2 - 2V_0 AB \mathrm{sn}^4 + A^3 \mathrm{sn}^6 \\ & + B^3 + 3A^2 B \mathrm{sn}^4 + 3AB^2 \mathrm{sn}^2 + \frac{AB}{2} k^2 \mathrm{sn}^2 \mathrm{cn}^2 \\ & + \frac{A}{2} \left(A \mathrm{sn}^4 \mathrm{dn}^2 + A k^2 \mathrm{sn}^4 \mathrm{cn}^2 - B \mathrm{cn}^2 \mathrm{sn}^2 + B \mathrm{sn}^2 \mathrm{dn}^2 \right) \end{aligned} \qquad (1.47)$$

cu $E = \omega A^2 \mathrm{sn}^4 + \omega B^2 + \omega 2AB \mathrm{sn}^2$, de unde rezultă uşor că

$$\begin{aligned} \omega A^2 \mathrm{sn}^4 + \omega B^2 + \omega 2AB \mathrm{sn}^2 = & \; 2k^2 A^2 \mathrm{sn}^6 + \mathrm{sn}^4 \left(-A^2 - A^2 k^2 + 3ABk^2 \right) \\ & + \mathrm{sn}^2 \left(-2AB - 2ABk^2 \right) + AB, \end{aligned} \qquad (1.48)$$

după ce am folosit în prealabil identităţile standard pentru funcţii eliptice de tip Jacobi, anume

$$\mathrm{sn}^2(x,k) + \mathrm{cn}^{\,2}(x,k) = 1, \qquad (1.49)$$

$$k^2 \mathrm{sn}^2(x,k) + \mathrm{dn}^2(x,k) = 1, \qquad (1.50)$$

$$\frac{\partial \mathrm{sn}(x,k)}{\partial x} = \mathrm{sn}(x,k) \mathrm{dn}(x,k), \qquad (1.51)$$

$$\frac{\partial \mathrm{cn}(x,k)}{\partial x} = -\mathrm{sn}(x,k)\mathrm{dn}(x,k), \tag{1.52}$$

şi

$$\frac{\partial \mathrm{dn}(x,k)}{\partial x} = -k^2\mathrm{cn}(x,k)\mathrm{sn}(x,k). \tag{1.53}$$

Egalând în termenul stâng şi drept al ecuaţiei (1.48) coeficienţii lui sn^0, sn^2, sn^4 şi sn^6 obţinem următoarele ecuaţii algebrice:

$$A = V_0 + k^2, \tag{1.54}$$

$$\omega B^2 = \frac{c^2}{2} + B^3 - \frac{1}{2}AB, \tag{1.55}$$

$$\omega A^2 = -2V_0AB + 3A^2B + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2k^2}{2} - \frac{3ABk^2}{2}, \tag{1.56}$$

şi

$$\omega 2AB = -V_0B^2 + 3AB^2 + AB + ABk^2. \tag{1.57}$$

Aceste ecuaţii pot fi rezolvate analitic fără nicio dificultate şi obţinem aproape imediat că

$$\omega = \frac{1}{2}\left(1 + k^2 + 3B - \frac{BV_0}{V_0 + k^2}\right) \tag{1.58}$$

şi

$$c^2 = B\left(1 + \frac{BV_0}{V_0 + k^2}\right)\left(V_0 + k^2 + Bk^2\right), \tag{1.59}$$

parametrii soluţiei de tipul $r_1^2(x)$ fiind acum complet determinaţi. Urmând un raţionament similar se poate arăta că pentru soluţiile de tipul $r_2^2(x)$ obţinem

$$V_0 = -\frac{3k^2}{8}, \tag{1.60}$$

$$\omega_1 = \frac{1+k^2}{8} + \frac{6a_1^2}{k^2}, \tag{1.61}$$

$$c_1 = \frac{a_1^2\left(16a_1^2-k^4\right)\left(16a_1^2+k^2-k^4\right)}{4k^6}, \tag{1.62}$$

$$b_1 = \frac{4a_1^2}{k^2}, \tag{1.63}$$

în timp ce pentru soluţiile de tipul $r_3^2(x)$ obţinem

$$V_0 = -\frac{3k^2}{8}, \tag{1.64}$$

$$\omega_1 = \frac{\left(1+k^2\right)}{8+6a_2^2}, \tag{1.65}$$

$$c_1 = \frac{a_2^2\left(16a_2^2-1\right)\left(16a_2^2+k^2-1\right)}{4}, \tag{1.66}$$

$$b_1 = 4a_2^2. \tag{1.67}$$

Aceste trei seturi de soluţii reprezintă cel mai important rezultat analitic asupra trenurilor de solitoni după formulele clasice introduse în anii '70 de Tsuzuki [84].

Soluţiile de tip soliton prezentate mai sus pot fi extinse pentru condensate în două şi trei dimensiuni, confinate sau nu, însă apar probleme suplimentare legate de stabilitatea dinamică a acestor structuri în lipsa potenţialelor externe. Menţionăm în final că interacţia dintre două obiecte de tip soliton poate fi descrisă cu succes folosind teoria ciocnirilor elastice şi/sau plastice. Structuri tip soliton similare celor de mai sus au fost observate încă din anii '80 în optica neliniară, o bună parte din literatura de specialitate ce tratează solitoni în condensate Bose-Einstein preluând atât metodele analitice cât şi reţetele numerice dezvoltate în optica neliniară.

1.3 Starea fundamentală a unui condensat Bose-Einstein

O dată clarificată problema temperaturii critice şi a ecuaţiei care modelează dinamica unui condensat Bose-Einstein, investigăm în această secţiune proprietăţile stării fundamentale ("ground state") identificând diferenţele calitative şi cantitative dintre cele două regimuri distincte ale unui condensat Bose-Einstein: regimul de densitate scăzută şi regimul de densitate înaltă (numit şi Thomas-Fermi).

1.3.1 Regimul de densitate joasă

În regimul de densitate scăzută sau, echivalent, regimul interacţiei slabe funcţia de undă a unui condensat tridimensional confinat de o capcană magnetică de forma celei din ecuaţia (1.7) poate fi aproximată de soluţia unei ecuaţii Schrödinger liniare, anume:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4}(b_x b_y b_z)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b_x^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2b_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2b_z^2}\right). \quad (1.68)$$

Calculând cu ajutorul ecuaţiei (1.31) energia condensatului obţinem

$$\mathcal{E}(b_x, b_y, b_z) = N \sum_i \hbar\omega_i \left(\frac{a_i^2}{4b_i^2} + \frac{b_i^2}{4a_i^2}\right) + \frac{N^2 U}{2(2\pi)^{3/2} b_x b_y b_z}, \quad (1.69)$$

unde b_x, b_y, b_z sunt parametrii variaţionali iar a_x, a_y, a_z sunt definiţi ca

$$a_i^2 = \frac{\hbar}{m\omega_i} \quad (1.70)$$

cu $i \in \{x, y, z\}$. Introducând parametrii $\beta_i = b_i/a_i$ şi minimizând energia din ecuaţia (1.69) obţinem următoarele ecuaţii algebrice care descriu starea fundamentală a condensatului:

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_i \left(\beta_i^2 - \frac{1}{\beta_i^2}\right) - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU}{\bar{a}^3} \frac{1}{\beta_x \beta_y \beta_z} = 0, \quad (1.71)$$

unde am introdus

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}} \tag{1.72}$$

şi

$$\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}. \tag{1.73}$$

Chiar dacă nu există o soluţie analitică generală a ecuaţiilor (1.71), putem obţine o soluţie aproximativă neglijând termenii proporţionali cu $1/b^2$. Aceştia provin din termenul care corespunde energiei cinetice în ecuaţia (1.31) şi pot fi neglijaţi pentru condensate suficient de largi în care contribuţia majoră la energia condensatului o dă interacţia dintre particule. Aproximaţia poate părea bizară la prima vedere căci pe de o parte presupunem o densitate mică astfel încât să putem folosi o funcţie de undă Gaussiană, în timp ce pe de alta presupunem o densitate suficient de mare astfel încât să putem modifica energia cinetică. Studii numerice detaliate arată însă că soluţiile analitice astfel obţinute, anume

$$\beta_i^5 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{Na}{\bar{a}} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i}\right)^{5/2} \tag{1.74}$$

sau

$$b_i = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/10} \left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{1/5} \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \bar{a}, \tag{1.75}$$

sunt în concordanţă calitativă cu calculele numerice complete. Din ecuaţia (1.75) obţinem că energia per particulă este dată de

$$\frac{\mathcal{E}}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{2/5} \hbar\bar{\omega}. \tag{1.76}$$

1.3.2 Regimul Thomas-Fermi

Al doilea regim distinct al unui condensat Bose-Einstein tridimensional este aşa-numitul regim Thomas-Fermi, pentru care putem neglija în ecuaţia Gross-Pitaevskii termenul ce corespunde energiei cinetice. Această aproximaţie se justifică pentru condensate foarte dense sau, echivalent, pentru condensate cu interacţii puternice prin faptul că termenul care corespunde

interacţiei domină numeric termenul cinetic. În această aproximaţie ecuaţia Gross-Pitaevkii devine

$$\left[V(\mathbf{r}) + U\left|\psi(\mathbf{r})\right|^2\right]\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}), \tag{1.77}$$

iar profilul de densitate al condensatului este dat de

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{U}, \tag{1.78}$$

în regiunea în care $V(\mathbf{r}) < \mu$ şi 0 în afara acesteia. Spre deosebire de cazul precedent condensatul are o suprafaţă bine definită care se poate calcula din ecuaţia

$$V(\mathbf{r}) = \mu. \tag{1.79}$$

Integrând profilul de densitate al condensatului în regiunea indicată de soluţia ecuaţiei precedente se poate arăta relativ uşor că extensia radială a condensatului este dată de

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2} \tag{1.80}$$

şi că

$$N = \frac{8\pi}{15}\left(\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\frac{\mu}{U}. \tag{1.81}$$

Din ecuaţiile precedente rezultă imediat că

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2}\left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{2/5}\hbar\bar{\omega}. \tag{1.82}$$

În cele din urmă, menţionăm că în locul extensiei radiale a condensatului pe cele trei direcţii se foloseşte deseori o extensie radială medie definită prin $\bar{R} = (R_x R_y R_z)^{1/3}$. Folosind definiţia extensiei radiale medii rezultă imediat că

$$\bar{R} = 15^{1/5}\left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{1/5}\bar{a} \approx 1.719\left(\frac{N_a}{\bar{a}}\right)^{1/5}\bar{a}. \tag{1.83}$$

1.3.2.1 Corecţii la aproximaţia Thomas-Fermi

Aşa cum am văzut în secţiunea precedentă pentru condensate repulsive de densitate mare proprietăţile stării fundamentale pot fi descrise cu bună precizie folosind aşa-numita aproximaţie Thomas-Fermi. Aceasta presupune neglijarea termenului cinetic din ecuaţia Gross-Pitaevskii, ceea ce este echivalent cu a spune că profilul densităţii condensatului este dat de

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a}\left[\mu - V(\mathbf{r})\right]$$

pentru $V(\mathbf{r}) \leq \mu$ şi 0 în afară. Principala limitare a acestei aproximaţii provine din neglijarea funcţiei de undă aproape de marginea exterioară a condensatului care conduce la rezultate lipsite de justificare fizică. Astfel, pe de o parte neglijăm energia cinetică în comparaţie cu energia interacţiei neliniare, în timp ce pe de altă parte folosind aproximaţia Thomas-Fermi observăm că termenul asociat energiei cinetice diverge aproape de marginea condensatului. Pentru a înţelege acest comportament ne reamintim că aproape de marginea condensatului, funcţia de undă este proporţională cu rădăcina pătrată a distanţei de la marginea condensatului, aşadar energia cinetică conţine o divergenţă de tip logaritmic.

Lundh *et al.* au arătat în Ref. [41] că această limitare a aproximaţiei Thomas-Fermi poate să fie depăsită folosind ecuaţia Gross-Pitaevskii scrisă foarte aproape de marginea condensatului. Astfel, pentru un condensat unidimensional termenul asociat energiei potenţiale, $V(x)\,|\psi|^2 = m/2\omega^2 x^2\,|\psi|^2$, poate fi aproximat ca $F\tilde{x}\,|\psi|^2$ unde $\tilde{x}$ măsoară distanţa de la marginea condensatului către punctul curent. Ideea din spatele acestei aproximaţii este aceea că funcţia de undă Thomas-Fermi reproduce cu acurateţe rezultatele numerice peste tot mai puţin aproape de marginea condensatului, regiune în care putem utiliza ecuaţia Gross-Pitaevskii în care includem aproximaţia liniară a potenţialului extern care confinează condensatul. Această ecuaţie simplificată permite o soluţie analitică care ne arată că prin includerea contribuţiei energiei cinetice în funcţionala Gross-Pitaevskii funcţia de undă dobândeşte o coadă iar condensatul se extinde cu mult înafara regiunii indicate de aproximaţia Thomas-Fermi.

Ecuaţia Gross-Pitaevskii aproape de marginea condensatului poate fi scrisă sub forma

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+Fx+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\left|\psi(x)\right|^2\right]\psi(x)=\mu\psi(x), \tag{1.84}$$

unde am omis "~" deasupra lui x. Introducând variabilele scalate $y=x/\delta$, unde δ este dat de $\hbar^2/2m\delta^2=F\delta$, şi o funcţie de undă scalată dată de $\Psi=\psi/b$, unde $b^2=Fm\delta/4\pi\hbar^2 a$ obţinem

$$\ddot{\Psi}=y\Psi+\Psi^3, \tag{1.85}$$

cu observaţia că derivatele din ecuaţia precedentă sunt în raport cu y. Folosind această notaţie aproximaţia Thomas-Fermi devine

$$\Psi=\sqrt{-y}, \tag{1.86}$$

pentru $y<0$ şi

$$\Psi=0 \tag{1.87}$$

pentru $y>0$.

Ecuaţia (1.85) admite atât soluţii numerice cât şi analitice, pentru $y\gg 1$ putând fi arătat uşor că după liniarizarea ecuaţiei (1.85) se obtine soluţia aproximativă

$$\Psi\simeq\frac{C}{y^{1/4}}\exp\left(-\frac{2y^{3/2}}{3}\right), \tag{1.88}$$

în timp ce pentru $y\ll 1$ avem $\Psi\simeq\sqrt{-y}$, care este tocmai soluţia Thomas-Fermi. Corecţia de ordinul întâi la soluţia Thomas-Fermi se determină relativ uşor descompunând funcţia de undă sub forma $\Psi=\Psi_0+\Psi_1$, unde Ψ_0 este soluţia Thomas-Fermi iar Ψ_1 este soluţia ecuaţiei

$$-\ddot{\Psi}_1+y\Psi_1+3\Psi_0^2\Psi_1=\ddot{\Psi}_0. \tag{1.89}$$

Folosind $\Psi_0^2=-y$ şi $\ddot{\Psi}_0=1/4y\sqrt{-y}$ găsim că

$$\Psi_1\simeq-\frac{1}{8y^2\sqrt{-y}}, \tag{1.90}$$

unde derivata de ordinul 2 a lui Ψ_1 a fost neglijată, deoarece contribuie la termeni de ordin superior lui $1/y$. Soluţia asimptotică este astfel dată de

$$\Psi = \sqrt{-y}\left(1 + \frac{1}{8y^3}\right). \tag{1.91}$$

1.3.3 Condensate încărcate în rețele optice

O problemă aparte o reprezintă identificarea stărilor staţionare ale unui condensat încărcat într-o reţea optică (a se vedea Refs. [20, 42, 43, 90, 91] pentru o trecere în revistă a celor mai importante rezultate). Pentru a determina stările staţionare pornim de la densitatea de energie a unui condensat încărcat într-o reţea optică şi aplicăm o metodă variaţională pentru determinarea stărilor de energie minimă. Folosind funcţionala din ecuaţia (1.29) cu un potenţial extern periodic avem densitatea de energie

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left|\frac{d\psi(x)}{dx}\right|^2 + V_0\cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)|\psi(x)|^2 + \frac{U}{2}|\psi(x)|^4\right] \tag{1.92}$$

şi densitatea de particule

$$n = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} dx\,|\psi(x)|^2. \tag{1.93}$$

Folosind teorema Bloch funcţia de undă se poate scrie ca produs al unei unde plane şi al unei funcţii periodice de perioadă egală cu cea a reţelei optice, adică

$$\psi = \exp(ikx)\sqrt{n}f(x). \tag{1.94}$$

Deoarece $f(x)$ este funcţie periodică se poate descompune într-o serie de unde plane, *i.e.*

$$f(x) = \sum_{\iota} a_\iota \exp(i2\pi\iota x/d), i = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm\iota_{max}, \tag{1.95}$$

coeficienţii undelor plane trebuind să respecte relaţia

$$\sum |a_i|^2 = 1 \tag{1.96}$$

pentru ca funcţia să fie bine normată. Descompunerea lui $f(x)$ de mai sus poate fi folosită cu succes în calcule numerice detaliate asupra structurii de bandă a condensatului (a se vedea în special rezultatele din Ref. [42]), însă în cele ce urmează vom trunchia seria de unde plane la primii trei termeni, adică $i = 0, 1, -1$, astfel încât integralele din ecuaţia (1.92) să poată fi calculate analitic. Funcţia de undă se scrie aşadar ca

$$\psi = \sqrt{n}\exp(ikx)\left[a_0 + a_1\exp\left(\frac{i2\pi x}{d}\right) + a_{-1}\exp\left(-\frac{i2\pi x}{d}\right)\right] \tag{1.97}$$

unde coeficienţii a_0, a_1, a_{-1} sunt astfel aleşi pentru a fi îndeplinită relaţia

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1. \tag{1.98}$$

Cea mai simplă parametrizare care respectă constrângerea de mai sus este dată de $a_0 = \cos(\theta)$, $a_1 = \sin(\theta)\cos(\phi)$ şi $a_{-1} = \sin(\theta)\sin(\phi)$, caz în care cei trei termeni ai energiei condensatului pot fi calculaţi cu uşurinţă. Astfel, energia cinetică este dată de

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[k^2 + 2k\left(\frac{2\pi}{d}\right)\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)\right) + \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2\sin^2(\theta)\right], \tag{1.99}$$

energia potenţială este dată de

$$\mathcal{E}_{pot} = V_0\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos(\phi) + \sin(\phi)), \tag{1.100}$$

în timp ce energia de interacţie este

$$\mathcal{E}_{int} = nU\left[\frac{1}{2} + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)(\cos(\phi) + \sin(\phi))^2 + \frac{1}{4}\sin^4(\theta)\sin^2(2\phi)\right]. \tag{1.101}$$

Stările staţionare ale condensatului se determină prin minimizarea energiei totale funcţie de parametrii variaţionali θ şi ϕ, adică

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\phi} = 0, \tag{1.102}$$

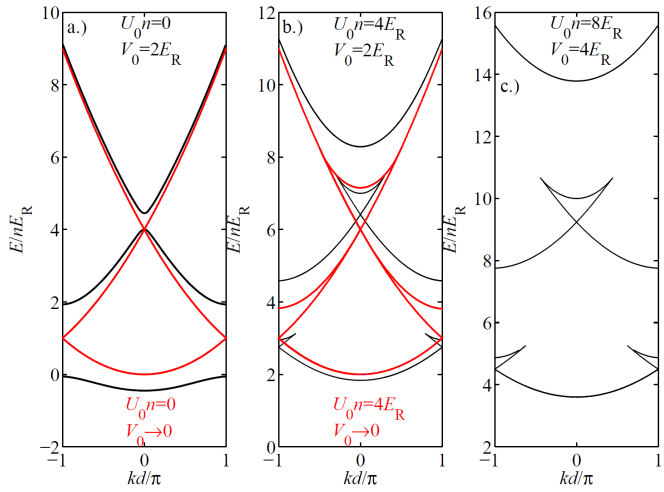

Figura 1.2: Stările staţionare ale unui condensat Bose-Einstein încărcat într-o reţea optică. Stările au fost obţinute prin rezolvarea numerică a ecuaţiilor (1.102). Am reprezentat cu roşu stările staţionare ale condensatului în limita $V_0 \to 0$.

şi

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} = 0. \tag{1.103}$$

Rezolvând numeric ecuaţiile precedente observăm două tipuri distincte de soluţii: soluţiile periodice ce există de-a lungul primei zone Brillouin şi soluţiile ce există la marginea şi mijlocul primei zone Brillouin. Acestea din urmă reprezintă nişte soluţii exclusiv neliniare care formează bucle închise la marginea şi la mijlocul zonei Brillouin. Specificitatea acestor soluţii este că există şi pentru reţele optice de amplitudine foarte mică, fiind de fapt un tren de solitoni luminoşi.

Pe lângă soluţiile discutate mai sus există şi soluţii periodice neliniare a căror perioadă este dublul aceleia a reţelei optice. Aceste stări au fost prezise teoretic în Ref. [43] şi au fost confirmare experimental în Ref. [28].

2 Abordări analitice ale ecuației Gross-Pitaevskii

În acest capitol introducem tehnici ce permit studiul analitic al dinamicii condensatelor Bose-Einstein. Alături de calculele hidrodinamice, metodele variaţionale reprezintă singurele instrumente teoretice care ne furnizează informaţii în formă analitică asupra soluţiilor ecuaţiei Gross-Pitaevskii. Deoarece ecuaţia Gross-Pitaevskii este o ecuaţie neliniară cu derivate parţiale, majoritatea informaţiilor asupra dinamicii condensatelor sunt obţinute prin metode numerice (a se vedea în acest sens Adhikari *et al.* [2, 3, 4, 5, 50]).

În prima parte a capitolului vom introduce o funcţie de probă de formă Gaussiană cu caţiva parametri liberi. Aceasta a fost folosită de către Perez-Garcia *et al.* [63, 64] în scopul de a reduce problema infinit-dimensională a ecuaţiei diferenţiale parţiale la o ecuaţie diferenţială ordinară de ordin 2 pentru parametrii care caracterizează soluţia. Soluţia ecuaţiei Schrödinger liniare fiind de formă exponenţială, funcţiile de probă de tip Gaussian oferă rezultate destul de precise pentru condensate de densitate joasă, utilitatea calculului variaţional fiind aşadar evidentă.

În cea de-a doua parte vom arăta utilitatea introducerii unei funcţii q-Gaussiene [22, 23, 25, 56], singura capabilă să refacă analitic atât regimul de densitate joasă cât şi cel de densitate înaltă. Metoda variaţională utilizată constă în reducerea ecuaţiei Gross-Pitaevskii la un set de trei ecuaţii: două ecuaţii diferenţiale ordinare neliniare cuplate care descriu faza şi curbura funcţiei de undă şi o ecuaţie algebrică din care rezultă lăţimea generalizată a condensatului.

2.1 Calcule variaţionale

2.1.1 Calcul variaţional bazat pe funcţii Gaussiene

Pornind de la un gaz tridimensional condensat în sens Bose-Einstein prins într-o capcană magnetică la $T = 0$ cu număr fix de particule N, scriem ecuaţia Gross-Pitaevskii

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r},t) + U\left|\psi\right|^2\psi(\mathbf{r},t) \quad (2.1)$$

unde $V(\mathbf{r})$ este potenţialul capcanei dat de

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\lambda_x^2x^2 + \lambda_y^2y^2 + \lambda_z^2z^2\right), \quad (2.2)$$

$\lambda_\eta\,(\eta = x, y, z)$ reprezentând constantele care descriu anizotropia capcanei. În acest caz interacţia este dată de $U = 4\pi\hbar a/m$ unde a este lungimea de împrăştiere între două particule. De reţinut că numărul de particule

$$N = \int d\mathbf{r}\left|\psi\right|^2 \quad (2.3)$$

rămâne neschimbat din punct de vedere dinamic în ecuaţia (2.1) chiar dacă $V(\mathbf{r})$ şi U sunt dependente de timp.

Pentru realizarea calculului variaţional [63, 64] este necesar să folosim densitatea de Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{i}{2}\hbar\left(\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left|\nabla\psi(\mathbf{r},t\right|^2 \\ & + V(\mathbf{r})\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^2 + \frac{2\pi a\hbar^2}{m}\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

şi un ansatz Gaussian de forma

$$\psi(x,y,z,t) = A(t)\prod_\eta \exp\left\{\frac{-\left[\eta-\eta_0(t)\right]^2}{2w_\eta^2(t) + i\eta\alpha_\eta(t) + i\eta^2\beta_\eta(t)}\right\}, \quad (2.5)$$

unde $\eta = x, y, z$, w_η sunt lăţimile condensatului, β_η fazele asociate, η_0 centrul anvelopei Gaussiene, α_η faza asociată centrului anvelopei Gaussiene iar $A(t)$ este amplitudinea funcţiei de undă. Integrând densitatea de Lagrangian în spatiul (x, y, z) obţinem

$$\begin{aligned} L = \int d\mathbf{r}\mathcal{L} = & \frac{\pi^{3/2}}{2} w_x(t) w_y(t) w_z(t) \left\{ i\hbar \left(A^* \dot{A} - A\dot{A}^* \right) \right. \\ & + |A|^2 \sum_{\eta=x,y,z} \left[\left(\dot{\beta}_\eta - \frac{2\hbar}{m}\beta_\eta^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\lambda_\eta^2 \right) \left(w_\eta^2 + 2\eta_0^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{\hbar^2 w_\eta^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \alpha_\eta^2}{m} + 2\eta_0 \left(\dot{\alpha}_\eta - \frac{2\hbar^2}{m}\alpha_\eta\beta_\eta \right) \right] \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}\pi\hbar^2 a}{m} |A|^4 \right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

din care se obţin ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{2.7}$$

unde $q_j \equiv \{w_x, w_y, w_z, A, A^*, x_0, y_0, z_0, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z\}$.

Ecuaţiile Euler-Lagrange astfel obţinute ne arată că problema infinit-dimensională a rezolvării ecuaţiei Gross-Pitaevskii se reduce la o problema finit-dimensională. Din ecuaţia (2.7) obţinem un set de ecuaţii diferenţiale ordinare cuplate

$$\frac{d^2}{d\tau^2} v_x + \lambda_x^2 v_x = \frac{1}{v_x^3} + \frac{P}{v_x^2 v_y v_z}, \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} v_y + \lambda_y^2 v_y = \frac{1}{v_y^3} + \frac{P}{v_x^2 v_y v_z}, \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} v_z + \lambda_z^2 v_z = \frac{1}{v_z^3} + \frac{P}{v_x^2 v_y v_z}, \tag{2.10}$$

unde $\tau = \omega t$, $P = \sqrt{2/\pi} N a / a_0$, $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ şi $w_\eta = a_0 v_\eta$ cu $\eta = x, y, z$. Aceste ecuaţii descriu dinamica condensatului prin evoluţia în timp a lăţimii condensatului pe cele trei direcţii şi au fost folosite

pentru determinarea frecvenţelor modurilor colective ale unor condensate tridimensionale [63].

2.1.2 Calcul variațional bazat pe funcții q-Gaussiene

O metodă asemănătoare celei prezentate în secţiunea anterioară este cea în care pentru a descrie starea condensatului aproape de starea de bază se introduce un ansatz q-Gaussian. Spre deosebire de cazul precedent vom considera acum un condensat unidimensional a cărui dinamică este dată de varianta unidimensională a ecuaţiei Gross-Pitaevskii, anume

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(x) + U(t)\left|\psi(x,t)\right|^2\right)\psi(x,t), \quad (2.11)$$

unde am considerat pentru simplitate $\hbar = m = 1$. Menţionăm că $U(t)$ depinde de timp prin lungimea de împrăştiere între două particule, care poate fi modificată (ca funcţie de timp) prin aşa-numitele rezonanţe Feshbach (a se vedea Ref. [65] Cap. 5).

Potenţialul capcanei magnetice parabolice în acest caz este de forma:

$$V(x) = \frac{\Omega^2}{2}x^2. \quad (2.12)$$

Funcţia de undă de probă de tip q-Gaussian este dată de :

$$\psi(x,t) = f[q(t)]\sqrt{N}\left(1 - \frac{(1-q(t))\,x^2}{2w^2(t)}\right)^{\frac{1}{1-q(t)}} e^{ix^2\beta(t)} \quad (2.13)$$

unde $\{w(t), \beta(t), q(t)\}$ sunt trei parametri liberi dependenţi de timp ce corespund lăţimii condensatului şi fazei asociate în timp ce parametrul q indică regimul condensatelor Bose-Einstein.

Impunând condiţia de normare

$$\int_D \left|\psi(x,t)\right|^2 dx = N \quad (2.14)$$

şi folosind domeniul de integrare

$$D = \left[-\frac{\sqrt{2}w(t)}{\sqrt{1-q\left(t\right)}}, \frac{\sqrt{2}w\left(t\right)}{\sqrt{1-q\left(t\right)}} \right] \tag{2.15}$$

obţinem

$$f\left[q\left(t\right)\right] = \frac{\left(1-q\left(t\right)\right)^{1/4}}{2^{1/4}w\left(t\right)^{1/2}B^{1/2}\left(\frac{1}{2}, \frac{-3+q\left(t\right)}{-1+q\left(t\right)}\right)}, \tag{2.16}$$

unde $B\left(.,.\right)$ este funcţia Euler-Lagrange beta.

Pentru $q\left(t\right)=1$ ansatzul q-Gaussian redă ansatzul valabil pentru condensate de densitate joasă, anume

$$\lim_{q(t)\to 1}\left(1-\frac{\left(1-q\left(t\right)\right)x^2}{2w^2\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{1-q(t)}} = \exp\left(\frac{-x^2}{2w^2\left(t\right)}\right) \tag{2.17}$$

cu $D=(-\infty,\infty)$, în timp ce pentru $q\left(t\right)=-1$ redă profilul de densitate parabolic al regiunii Thomas-Fermi valabil pentru condensate de densitate înaltă, anume

$$\lim_{q(t)\to -1}\left(1-\frac{\left(1-q\left(t\right)\right)x^2}{2w^2\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{1-q(t)}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{w^2\left(t\right)}} \tag{2.18}$$

cu $D=\left[-w\left(t\right),w\left(t\right)\right]$.

O altă funcţie care este capabilă să interpoleze între cele două regimuri ale unui condensat Bose-Einstein este aşa-numita funcţie S_n introdusă de Keçeli *et al.* [38] :

$$S_n\left(x\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{k}\right) \tag{2.19}$$

care devine funcţie Gaussiană pentru $n=1$ şi se transformă pentru $n\to\infty$ şi $|x|<1$ într-un profil parabolic

$$S_{\infty}(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k}\right) = \exp\left(\ln\left(1-x^2\right)\right) = 1-x^2. \quad (2.20)$$

Se urmează aceeaşi paşi ca şi în cazul anterior: astfel, se introduce ansatzul q-Gaussian în Lagrangianul condensatului Bose-Einstein şi se determină dinamica condensatului folosind ecuaţiile Euler-Lagrange, acestea fiind capabile să descrie dinamica condensatului indiferent de densitate.

După o serie de integrale simple obţinem că

$$\begin{aligned}\frac{L(t)}{N} &= \frac{2w^2(t)\dot{\beta}(t)}{7-3q(t)} + \frac{NU(t)}{w(t)\sqrt{2}}\Delta[q(t)] + \frac{w^2(t)\Omega^2}{7-3q(t)} \\ &+ \frac{5-q(t)}{8w^2(t)(1+q(t))} + \frac{4w^2(t)\beta^2(t)}{7-3q(t)} \quad (2.21)\end{aligned}$$

unde

$$\Delta[q(t)] = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\frac{4}{q(t)-1}\right)\sqrt{1-q(t)}}{2B^2\left(\frac{1}{2},\frac{q(t)-3}{q(t)-1}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{q(t)-1}\right)}. \quad (2.22)$$

Calculând numeric funcţia $\Delta[q(t)]$ observăm că această funcţie este aproape liniară şi poate fi aproximată pentru regimul de densitate joasă cu:

$$\Delta[q(t)] = \frac{41-9q(t)}{64\sqrt{\pi}} \quad (2.23)$$

şi pentru cel de densitate înaltă cu:

$$\Delta[q(t)] = \frac{51-9q(t)}{100\sqrt{2}}. \quad (2.24)$$

Metoda variaţională în care se utilizează ansatzul q-Gaussian funcţionează cel mai bine pentru condensatele de densitate înaltă. În acest caz

$q(t)$ este aproape de (dar întotdeauna mai mare ca) -1 şi nu va avea niciodată ca rezultat divergenţa energiei cinetice, fiind prima metodă care a fost capabilă să descrie dinamic regimul Thomas-Fermi.

Setul de ecuaţii Euler-Lagrange obţinute pentru $\{w, \beta, q\}$ este:

$$\begin{aligned}
&\frac{q(t)-5}{4w^3(t)(1+q(t))} - \frac{\Delta[q(t)]NU(t)}{\sqrt{2}w^2(t)} \\
&\qquad +2w(t)\frac{\Omega^2+4\beta^2(t)+2\dot{\beta}(t)}{7-3q(t)} &= 0 \qquad (2.25)\\
&\qquad w(t)\left(4\beta(t)-\frac{3\dot{q}(t)}{7-3q(t)}\right) &= 2\dot{w}(t) \qquad (2.26)\\
&-\frac{6}{8(1+q^2(t))w^2(t)} + \frac{\Delta_q[q(t)]NU(t)}{\sqrt{2}w(t)} \\
&\qquad +3w^2(t)\frac{\Omega^2+4\beta^2(t)+2\dot{\beta}(t)}{(7-3q^2(t))} &= 0 \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

unde $(.)_q$ reprezintă derivata în raport cu q. Aşa cum a fost arătat în Ref. [56], aceste ecuaţii reproduc ecuaţiile din secţiunea precedentă pentru condensate cu număr mic de particule, în timp ce pentru condensate de densitate înaltă ele reproduc ecuaţiile hidrodinamice introduse de Dalfovo *et al.* [19], ecuaţii ce sunt detaliate în secţiunea următoare.

2.2 Calcule hidrodinamice

Pe lângă metodele variaţionale prezentate mai sus, se pot obţine informaţii analitice despre dinamica condensatelor Bose-Einstein prin abordări hidrodinamice, prima şi cea mai simplă fiind introdusă de Dalfovo *et al.* [19], abordare care permite reducerea ecuaţiei Gross-Pitaevskii la un set de ecuaţii ordinare diferenţiale pentru condensate de dimensiuni mari. Ecuaţiile astfel obţinute descriu oscilaţiile de amplitudine mare ale condensatului.

Ca şi în secţiunea dedicată metodelor variaţionale ce folosesc funcţii Gaussiene, pornim de la ecuaţia Gross-Pitaevskii tridimensională dependentă de timp

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + U|\psi|^2\right)\psi \qquad (2.28)$$

unde $U = 4\pi\hbar^2 a/m$, a este lungimea de împrăştiere iar $V(\mathbf{r})$ este potenţialul de confinare. Aşa cum am văzut mai devreme soluţia staţionară a ecuaţiei Gross-Pitaevskii este dată de (1.78), un calcul relativ simplu arătând că

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4\pi} U m^{3/2} \omega_x \omega_y \omega_z N\right]^{2/5}. \tag{2.29}$$

Luând în calcul efectul operatorului energiei cinetice din (2.28) numai în faza parametrului de ordine ψ, putem rescrie (2.28) în forma hidrodinamică

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (v\rho) = 0, \tag{2.30}$$

$$m\frac{\partial}{\partial t} v + \nabla\left(V(\mathbf{r}) + U\rho + \frac{mv^2}{2}\right) = 0, \tag{2.31}$$

unde $\rho = |\psi|^2$ este densitatea şi $v = (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\hbar/(2mi\rho)$ este viteza condensatului. Ecuaţia (2.30) reprezintă ecuaţia generală de continuitate, iar ecuaţia (2.31) arată natura nerotaţională a vitezei superfluidului. Se observă că rezultatul Thomas-Fermi obţinut anterior coincide cu configuraţia de echilibru dată de ecuaţiile (2.30)-(2.31) pentru $v = 0$ şi $\partial\rho/\partial t = 0$.

Ecuaţiile hidrodinamice (2.30)-(2.31) au avantajul că oferă frecvenţele corecte ale modurilor normale ale condensatului în limita unui număr mare de atomi, dar şi faptul că permit obţinerea unei ecuaţii algebrice care guvernează dispersia micilor oscilaţii.

Folosind pentru soluţiile ecuaţiilor (2.30)-(2.31) profilurile

$$\rho(\mathbf{r}, t) = a_x(t)\, x^2 + a_y(t)\, y^2 + a_z(t)\, z^2 + a_0(t), \tag{2.32}$$

$$v = \frac{1}{2}\nabla\left[\alpha_x(t)\, x^2 + \alpha_y(t)\, y^2 + \alpha_z(t)\, z^2\right], \tag{2.33}$$

unde ecuaţia (2.32) este limitată la regiunea în care $\rho \geq 0$,

$$a_0 = -(15N/8\pi)^{2/5}(a_x a_y a_z)^{1/5}$$

iar $a_\eta = \sqrt{\hbar/m\omega_\eta}$, se obţin două seturi de ecuaţii diferenţiale cuplate, anume

$$\dot{a_i} + 2a_i\alpha_i + a_i \sum_j \alpha_j = 0 \tag{2.34}$$

$$\dot{\alpha_i} + \alpha_i^2 + \omega_i^2 + \left(\frac{2g}{m}\right) a_i = 0 \tag{2.35}$$

unde a_i şi α_i sunt coeficienţi dependenţi de timp cu $i, j = x, y, z$. Prin calcularea lui α_i în termeni de $\dot{a_i}/a_i$ şi prin introducerea unor variabile adimensionale noi b_i definite implicit prin $a_i = -m\omega_i^2 \left(2gb_x b_y b_z b_i^2\right)^{-1}$, ecuaţiile (2.34) se reduc la $\alpha_i = \dot{b_i}/b_i$ în timp ce ecuaţiile (2.35) devin:

$$\ddot{b_i} + \omega_i^2 b_i - \frac{\omega_i^2}{b_i b_x b_y b_z} = 0, \tag{2.36}$$

unde al doilea şi al treilea termen dau efectul capcanei externe şi respectiv al forţelor interatomice. Se pot obţine astfel razele pătratice medii şi vitezele norului atomic funcţie de b_i:

$$\left\langle r_i^2 \right\rangle \equiv \tfrac{1}{N} \int d\mathbf{r} \rho\left(\mathbf{r}, t\right) r_i^2 = \left(\frac{2\mu}{7m\omega_{0i}^2}\right) b_i^2 \tag{2.37}$$

$$\left\langle v_i^2 \right\rangle \equiv \tfrac{1}{N} \int d\mathbf{r} \rho\left(\mathbf{r}, t\right) v_i^2 = \left(\frac{2\mu}{7m\omega_{0i}^2}\right) \dot{b}_i^2 \tag{2.38}$$

unde μ este dat de (2.29).

2.3 Teoria stabilităţii

Una din cele mai simple metode de a investiga stabilitatea dinamică a unui condensat Bose-Einstein porneşte de la abordarea variaţională a dinamicii condensatului. Astfel, pornind de la Lagrangianul asociat unui condensat uni-dimensional

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{i}{2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) - \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 + U_0 \left|\psi\right|^4\right], \tag{2.39}$$

scris aici, pentru simplitate, pentru $\hbar = 1$ şi $m = 1/2$, şi limitând analiza variaţională la soluţii de tip undă plană, anume

$$\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left(i(kx - \omega t)\right) \tag{2.40}$$

putem scrie deviaţiile de la o undă plană sub forma

$$\begin{aligned}\delta\psi &= (a(t)\exp(i\phi_a(t))\exp(iqx) + b(t)\exp(i\phi_b(t))\exp(-iqx)) \\ &\quad \times\exp(i(kx - \omega(t)). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Considerând, în plus, condiţii periodice la limită pentru $x \in [0, 2\pi]$ obţinem cu uşurinţă că

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -2\pi\left(a^2\dot{\phi}_a + b^2\dot{\phi}_b\right) + 2\pi\left(U\psi_0^2 - q^2\right)\left(a^2 + b^2\right) - \pi U_0\psi_o^4 \\ &\quad -4qk\pi\left(a^2 - b^2\right) + 4\pi U_0\psi_0^2 ab\cos\left(\phi_a + \phi_b\right) \\ &\quad +U_0\pi\left(a^4 + b^4 + 4a^2b^2\right), \end{aligned} \tag{2.42}$$

ceea ce sugerează că putem interpreta ϕ_a şi ϕ_b drept coordonate generalizate, $A(t) = 2a^2(t)$ şi $B(t) = 2b^2(t)$ fiind variabilele canonice asociate corespunzătoare unui Hamiltonian de forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{eff} &= \left(U\psi_0^2 - q^2\right)(A + B) - 2qk\,(A - B) \\ &\quad +2U\psi_0^2\sqrt{AB}\cos\left(\phi_a + \phi_b\right) + \frac{U}{4}\left(A^2 + B^2 + 4AB\right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ecuaţiile Lagrange sunt date de

$$a\dot{\phi}_a = C_1 a + C_2 b\cos\left(\phi_a + \phi_b\right) + Ua\left(a^2 + 2b^2\right) \tag{2.44}$$

$$\dot{a} = C_2 b\sin\left(\phi_a + \phi_b\right) \tag{2.45}$$

$$b\dot{\phi}_b = C_3 b + C_2 a\cos\left(\phi_a + \phi_b\right) + Ub\left(b^2 + 2a^2\right) \tag{2.46}$$

$$\dot{b} = C_2 a\sin\left(\phi_a + \phi_b\right) \tag{2.47}$$

unde $C_1 = U_0\psi_0^2 - q^2 - 2qk$, $C_2 = U_0\psi_0^2$ şi $C_3 = U_0\psi_0 - q^2$. Considerând că a este mic, ecuaţiile se pot rescrie sub forma

$$
\begin{aligned}
a &= b && (2.48)\\
\dot{a} &= C_2 a \sin\left(\phi_a + \phi_b\right) && (2.49)\\
\dot{\phi}_a + \dot{\phi}_b &= \left(C_1 + C_3\right) + 2C_2 \cos\left(\phi_a - \phi_b\right) && (2.50)
\end{aligned}
$$

unde am neglijat termeni de $\mathcal{O}\left(a^2\right)$ şi mai mici. Ultima ecuaţie se poate rezolva analitic relativ uşor obţinând că

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi_a(t) + \phi_b(t) && (2.51)\\
&= 2\arctan\left[\frac{\sqrt{\left(2U\psi_0^2 - q^2\right)}}{q}\tanh\left(tq\sqrt{\left(2U\psi_0^2 - q^2\right)}\right)\right]. && (2.52)
\end{aligned}
$$

Se observă acum cu uşurinţă că instabilitatea dinamică a condensatului este determinată de semnul termenului $2U\psi_0^2 - q^2$. Astfel, pentru $2U\psi_0^2 - q^2 < 0$

$$
a^2(t) \sim 1 - \frac{2U\psi_0^2}{q^2}\sin^2\left[t\sqrt{\left(q^2 - 2U\psi_0^2\right)q^2}\right] \qquad (2.53)
$$

iar condensatul este într-un regim de oscilaţii periodice stabile, în timp ce pentru $2U\psi_0^2 - q^2 > 0$ condensatul intră într-un regim instabil în care micile oscilaţii sunt amplificate exponenţial, anume

$$
a^2(t) \sim 1 + \frac{2U\psi_0^2}{q^2}\sinh^2\left[t\sqrt{\left(q^2 - 2U\psi_0^2\right)q^2}\right]. \qquad (2.54)
$$

Pe lângă ecuaţiile (2.53) şi (2.54) care descriu dinamica condensatului în interiorul regimului stabil şi al celui instabil putem determina, de asemenea, dinamica condensatului chiar la graniţa dintre regimul stabil şi cel instabil, anume $2U\psi_0^2 = q^2$. Rescriind ecuaţiile (2.48)-(2.50) obţinem

$$
\dot{a} = U\psi_0^2 a \sin(\phi) \qquad (2.55)
$$

şi

$$\dot{\phi} = -2U\psi_0^2 + 2U\psi_0^2\cos(\phi). \tag{2.56}$$

Soluţia acestui sistem este dată de

$$\phi = 2\arctan\left(\frac{1}{2U\psi_0^2 t + c}\right) \tag{2.57}$$

şi

$$a(t) = \frac{\sqrt{1 + \left(2U\psi_0^2 t + c\right)^2}}{\sqrt{1 + c^2}}, \tag{2.58}$$

aşadar la graniţa dintre regimul stabil şi cel instabil soluţiile sunt tot instabile însă instabilitatea nu este exponenţială ci doar liniară.

3 Modele discrete

Ecuaţia Gross-Pitaevskii discutată în capitolele precedente permite abordări variaţionale pentru condensate relativ omogene, caz în care dinamica sistemului este redusă la câteva ecuaţii diferenţiale ordinare, însă acestea nu pot fi extinse cu uşurinţă pentru condensate încărcate în reţele optice. Astfel, pentru soluţia ecuaţiei Gross-Pitaevskii uni-dimensionale cu un potenţial periodic de forma

$$V(x) \quad = \quad 2V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right), \tag{3.1}$$

trebuie căutate metode care să permită descrierea unor soluţii periodice, de perioadă egală cu perioada reţelei optice. Metodele precedente de minimizare a energiei (scrisă acum pentru pentru o singură celulă a potenţialului extern)

$$\mathcal{E} \quad = \quad \int_{-d}^{d} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left|\frac{d\psi(x)}{dx}\right|^2 + V_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)|\psi(x)|^2 + \frac{U}{2}|\psi(x)|^4\right] \tag{3.2}$$

pot fi, în principiu, aplicate, dar lipsa unei funcţii test flexibile analitic face ca ecuaţiile finale să fie foarte complicate. O altă variantă este să descompunem funcţia de undă sub forma

$$\Psi \quad = \quad \sum_n \psi_n(t)\Phi_n(\mathbf{r}), \tag{3.3}$$

unde prefactorii $\psi_n(t)$ pot lua valori complexe, iar anvelopele $\Phi_n(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)$ sunt reale, identice şi normate la unitate, ecuaţia Gross-Pitaevskii putând fi rescrisă sub forma

$$i\hbar\sum_l \Phi_l(x)\frac{d\psi_l(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_l \psi_l(t)\frac{d^2\Phi_l(x)}{dx^2} + V(x)\sum_l \psi_l(t)\Phi_l(t) + U\left|\sum_l \psi_l(t)\Phi_l(x)\right|^2 \sum_m \psi_m(t)\Phi_m(x). \quad (3.4)$$

Numărul de atomi din condensat este obţinut din formula

$$N = \sum_n |\psi_n|^2 . \quad (3.5)$$

Înmulţind ecuaţia (3.4) cu Φ_n, unde n este arbitrar ales, şi integrând în stânga şi dreapta după x obţinem întâi

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d\psi_n(t)}{dt} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_l \left[\psi_l(t)\int dx\Phi_n(x)\frac{d^2\Phi_l(x)}{dx^2}\right] \\ &+U_0\int dx\left[\Phi_n(x)\left|\sum_l \psi_l(t)\Phi_l(x)\right|^2\sum_m \psi_m(t)\Phi_m(x)\right] \\ &+\sum_l \left[\psi_l(t)\int dxV(x)\Phi_n(x)\Phi_l(x)\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

şi apoi

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d\psi_n(t)}{dt} &= \frac{\hbar^2}{2m}\sum_l \left[\psi_l(t)\int dx\frac{d\Phi_l(x)}{dx}\frac{d^2\Phi_n(x)}{dx}\right] \\ &+\sum_l \left[\psi_l(t)\int dxV(x)\Phi_n(x)\Phi_l(x)\right] \\ &+U_0\left|\psi_n(t)\right|^2\psi_n(t)\int \Phi_n^4(x), \end{aligned} \quad (3.7)$$

unde

$$c_{\pm 1} = \frac{\hbar}{2m}\int dx\frac{d\Phi_n(x)}{dx}\frac{d\Phi_{n\pm 1}(x)}{dx} + \int dxV(x)\Phi_{n\pm 1}(x)\Phi_n(x), \quad (3.8)$$

$$c_0 = \frac{\hbar}{2m}\int dx\left(\frac{d\Phi_n(x)}{dx}\right)^2 + \int dx V(x)\Phi_n(x)^2, \quad (3.9)$$

şi

$$\tilde{U} = U\int dx\Phi_n^4(x), \quad (3.10)$$

unde pentru simplitate vom scrie $\tilde{U}$ drept U, rescalarea lui U dată de ecuaţia (3.10) fiind implicită. Pentru a trece de la ecuaţia (3.6) la ecuaţia (3.7) am considerat condiţii periodice la frontiera astfel încât

$$\Phi_n(x)\left.\frac{d\Phi_l(x)}{dt}\right|_{\mathcal{B}} = 0, \quad (3.11)$$

unde $\mathcal{B}$ este marginea reţelei, şi am presupus că

$$\int d\mathbf{r}\Phi_m\Phi_l^2\Phi_n \neq 0 \quad (3.12)$$

doar pentru m diferit de l şi diferit de n. Presupunând, de asemenea, că

$$\int dx V(x)\Phi_{n-1}(x)\Phi_n(x) \cong \int dx V(x)\Phi_{n+1}(x)\Phi_n(x) \quad (3.13)$$

şi

$$\int dx\frac{d\Phi(x)}{dx}\frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx} \cong \int dx\frac{d\Phi_n(x)}{dx}\frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx} \quad (3.14)$$

ecuaţia se simplifică substanţial şi poate fi scrisă sub forma

$$i\hbar\frac{d\psi_n(t)}{dt} = \left(\epsilon_n + U\left|\psi_n\right|^2\right)\psi_n(t) - K\left(\psi_{n-1}(t) + \psi_{n+1}(t)\right). \quad (3.15)$$

3.1 Stări staţionare

Varianta independentă de timp a ecuaţiei precedente se poate obţine pornind de la Hamiltonianul

$$\mathcal{H} = -\sum_n \left[K\left(\psi_n^* \psi_{n+1} + \psi_n \psi_{n+1}^*\right) - \frac{1}{2} U \left|\psi_n\right|^4 \right] \tag{3.16}$$

şi minimizând

$$\frac{\partial}{\partial \psi^*}\left(\mathcal{H} - \mu N\right) = 0, \tag{3.17}$$

unde μ este, ca în capitolele precedente, multiplicatorul Lagrange introdus pentru a asigura numărul constant de particule. Ecuaţia obţinută este de forma

$$U\left|\psi_n\right|^2 \psi_n - K\left(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}\right) - \mu \psi_n = 0, \tag{3.18}$$

iar pentru a ne apropia de soluţiile de tip Bloch ale unei ecuaţii Schrödinger cu un potenţial periodic rescriem ψ_n sub forma $\psi_n = e^{inkd} g_n$, de unde obţinem

$$U\left|g_n\right|^2 g_n - K g_{n+1} \exp\left(ikd\right) - K g_{n-1} \exp\left(-ikd\right) - \mu g_n = 0. \tag{3.19}$$

Numărul de particule din condensat îl obţinem însumând particulele din fiecare minim al potenţialului. În cele ce urmează vom considera soluţii cu periodicitate 2^p astfel încât

$$g_n = g_{n+2^p} \tag{3.20}$$

numărul de particule dintr-o perioadă fiind dat de

$$\sum_{j=1}^{2^p} \left|g_j\right|^2 = N_a. \tag{3.21}$$

Stările cu $p = 0$ corespund clasicelor stări de tip Bloch, în timp ce stările cu $p = 1$ sunt aşa-numitele stări de perioadă dublă (a se vedea Ref. [43] pentru o analiză detaliată). Pentru stările de tip Bloch avem $g_n = g$, aşadar

$$\psi_n = \exp(iknd)\sqrt{\nu} \tag{3.22}$$

iar

$$\mu = -2K\cos(kd) + \frac{1}{2}U\nu, \tag{3.23}$$

energia unei particule fiind egală cu

$$\mathcal{E} = -2K\cos(kd) + \frac{1}{2}U\nu. \tag{3.24}$$

Pentru următoarea bandă, $p = 1$, folosim condiţiile la frontieră $g_0 = g_2$ şi $g_1 = g_3$, obţinând uşor din ecuaţiile (3.19) că

$$\begin{aligned} U\left(|g_1|^2 - |g_2|^2\right) &= \left[\frac{|g_2|}{|g_1|}\exp\left(i\left(\phi_2 - \phi_1\right)\right) - \frac{|g_1|}{|g_2|}\exp\left(i\left(\phi_1 - \phi_2\right)\right)\right] \\ &\quad \times 2K\cos(kd). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Cum ϕ_j poate fi 0 sau π rezultă uşor că energia unei particule este egală cu

$$\mathcal{E} = 2\frac{K^2}{U\nu}\cos^2(kd) + U\nu. \tag{3.26}$$

Particularitatea acestei stări este că potenţialul chimic $\mu = 2U\nu$ este independent de k, ν fiind numărul mediu de atomi din fiecare minim al reţelei optice. Considerând că stările cu $p = 1$ sunt formate prin repetarea unei celule ce cuprinde două minime de potenţial indexate, pentru simplitate, cu a şi b, un calcul simplu ne arată că numărul de atomi din fiecare site al celulei periodice este dat de

$$N_a = \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\left(\frac{K}{U}\right)^2 \cos^2(kd)} \tag{3.27}$$

şi

$$N_b = \nu - \sqrt{\nu^2 - 4\left(\frac{K}{U}\right)^2 \cos^2(kd)}, \tag{3.28}$$

g_a şi g_b fiind date de

$$g_a = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\left(\frac{K}{U}\right)^2 \cos^2(kd)}} \tag{3.29}$$

şi

$$g_b = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left[1 + \text{sign}\left(\cos(kd)\right)\right]\right\} \times\sqrt{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\left(\frac{K}{U}\right)^2 \cos^2(kd)}}. \tag{3.30}$$

Observăm imediat că stările de perioadă dublă există atâta vreme cât

$$|\cos(kd)| \leq \frac{U\nu}{2K}, \tag{3.31}$$

aşadar o asemenea stare există indiferent de valoarea interacţiei interatomice U atâta vreme cât $|k|$ este suficient de aproape de $\pi/2d$.

Când am determinat soluţiile de perioada $p = 1$ utilizând ecuaţia (3.25) am urmărit soluţiile nedegenerate, anume acelea care au perioada doi atât în raport cu g_j cât şi în raport cu $|g_j|^2$. Există însă şi o clasa de soluţii degenerate care au perioada doi în raport cu g_j şi perioada unu în raport cu $|g_j|^2$. Pentru determinarea acestora pornim de la ecuaţiile (3.19) scrise explicit pentru o stare cu $p = 1$, anume

$$U\left|g_a\right|^2 g_a - \mu g_a \quad = \quad 2Kg_b\cos(kd) \tag{3.32}$$

şi

$$U\left|g_b\right|^2 g_b - \mu g_b \quad = \quad 2Kg_a\cos(kd), \tag{3.33}$$

şi fixăm $|g_a| = |g_b|$. Această ultimă constrângere implică

$$U\mathcal{N} - \mu \quad = \quad 2K\cos(kd)\exp\left(i\left(\phi_b - \phi_a\right)\right) \tag{3.34}$$

şi

$$U\mathcal{N} - \mu \quad = \quad 2K\cos(kd)\exp\left(i\left(\phi_a - \phi_b\right)\right), \tag{3.35}$$

unde $\mathcal{N} = N_a = N_b$. Din aceste ecuaţii se determină relativ uşor potenţialul chimic

$$\mu \quad = \quad 2K\cos(kd) + U\nu \tag{3.36}$$

şi energia per particulă

$$\mathcal{E} \quad = \quad 2K\cos(kd) + \frac{1}{2}U\nu. \tag{3.37}$$

3.2 Stabilitatea stărilor staţionare

Pentru a investiga stabilitatea energetică şi dinamica a unei stări staţionare vom considera în cele ce urmează o deviaţie de forma

$$\delta g_n \quad = \quad \exp(iknd)\left(u_n\exp(iqnd) + v_n^*\exp(-iqnd)\right) \tag{3.38}$$

a cărei evoluţie în timp este dată de

$$i\hbar\frac{dg_n}{dt} = U\left|g_n\right|^2 g_n - Kg_{n+1}e^{ikd} - Kg_{n-1}e^{-ikd} - \mu g_n. \quad (3.39)$$

În cele ce urmează vom analiza, pe rând, stările de tip Bloch şi stările de perioadă dublă identificând pentru fiecare stare domeniile stabilităţii energetice şi dinamice. Pentru stabilitatea energetică vom scrie contribuţia deviaţiei la funcţionala de energie a condensatului sub forma unei forme pătratice, în timp ce pentru stabilitatea dinamică vom investiga valorile proprii ale sistemului dinamic ce descrie evoluţia în timp a amplitudinilor deviaţiilor.

3.2.1 Stări Bloch

Contribuţia deviaţiei (3.38) la funcţionala energiei poate fi scrisă cu uşurinţă sub forma

$$\delta^2\mathcal{G} = (u^* v^*)\underbrace{\begin{pmatrix} U\nu + \triangle\mathcal{E} & U\nu \\ U\nu & U\nu + \triangle\mathcal{E}_- \end{pmatrix}}_{\hat{A}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\triangle\mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}\left(k \pm q\right) - \mathcal{E}(k), \quad (3.41)$$

unde $\mathcal{E}(k)$ este energia per particulă din ecuaţia (3.24). Instabilitatea energetică apare atunci când $\hat{A}$ are valori proprii negative, în timp ce instabilitatea dinamică apare atunci când $\hat{\sigma}_z\hat{A}$ are valori complexe, unde $\hat{\sigma}_z$ este bine-cunoscuta matrice Pauli. Valorile proprii ale lui $\hat{A}$ sunt date de

$$\lambda_1 = U + 4K\cos(kd)\sin^2\left(\frac{qd}{2}\right) + \sqrt{U^2 + 4K^2\sin^2(qd)\sin^2(kd)} \quad (3.42)$$

şi

$$\lambda_2 = U + 4K\cos(kd)\sin^2\left(\frac{qd}{2}\right) - \sqrt{U^2 + 4K^2\sin^2(qd)\sin^2(kd)}, \quad (3.43)$$

aşadar sistemul este stabil atunci când

$$\left[U + 4\cos(kd)\sin^2\left(\frac{qd}{2}\right)\right]^2 \quad \geq \quad U^2 + 4K^2\sin^2(qd)\sin^2(kd). \quad (3.44)$$

Se poate arăta uşor că inegalitatea precedentă poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{U\nu}{2K}\cos(kd) + \sin^2\left(\frac{qd}{2}\right) \quad \geq \quad \sin^2(kd), \quad (3.45)$$

de unde obţinem imediat că sistemul devine instabil atunci când

$$\frac{U\nu}{2K}\cos(kd) + \sin^2\left(\frac{qd}{2}\right) \quad = \quad \sin^2(kd). \quad (3.46)$$

Această ecuaţie arată, pe de o parte, că pentru valori scăzute ale lui $|k|$ sistemul devine instabil pentru $q \to 0$, în timp ce pe de altă parte reproduce criteriul lui Landau pentru stabilitate energetice în limita $kd \ll 1$, anume

$$\sin(kd)\tan(kd) \quad < \quad \frac{U\nu}{2K}. \quad (3.47)$$

Similar, analiza valorilor proprii ale matricei $\hat{\sigma}_z\hat{A}$ arată că sistemul este stabil din punct de vedere dinamic când

$$\cos(kd)\sin^2\left(\frac{qd}{2}\right) \quad > \quad -\frac{U\nu}{2K}, \quad (3.48)$$

în cazul în care $\cos(kd) > 0$, şi

$$\cos(kd) \quad \sin^2\left(\tfrac{qd}{2}\right) \quad < -\frac{U\nu}{2K}, \quad (3.49)$$

în cazul în care $\cos(kd) < 0$.

3.2.2 Stări de perioadă dublă

O analiză similară poate fi efectuată pentru stările de perioadă dublă, caz în care contribuţia deviaţiei (3.38) la funcţionala energiei

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{G} &= -\sum_{n=1}^{2}\Big[K\left(\delta\psi_n^*\delta\psi_{n+1}+\text{c.c.}\right)+\mu\left|\delta\psi_n\right|^2 \\ &\quad -\frac{U}{2}\left(\left(\psi_n^*\right)^2\delta\psi_n^2+\psi_n^2\left(\delta\psi_n^*\right)^2+4\left|\psi_n\right|^2\left|\delta\psi_n\right|^2\right)\Big] \qquad (3.50)\end{aligned}$$

poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{G} &= -2K\left(\left(u_1^*u_2+u_1u_2^*\right)\cos\left(kd+qd\right)+\left(v_1^*v_2+v_1v_2^*\right)\cos\left(kd-qd\right)\right) \\ &\quad +U\sum_{j=1}^{2}\left[u_jv_j^*\left(g_j^*\right)^2+u_j^*v_jg_j^2+\left(2\left|g_j\right|^2-\frac{\mu}{U}\right)\left(\left|u_j\right|^2+\left|v_j\right|^2\right)\right].\end{aligned}$$

După o analiză atentă a termenilor din ecuaţia precedentă observăm că ei pot fi scrişi, ca mai devreme, drept o formă pătratică

$$\delta^2\mathcal{G} = \begin{pmatrix}u_1^*\\v_1^*\\u_2^*\\v_2^*\end{pmatrix}^t\overbrace{\begin{pmatrix}f & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & f & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & -f & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & -f\end{pmatrix}}^{\hat{A}}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{pmatrix}, \qquad (3.51)$$

unde $f=\left|g_1\right|^2-\left|g_2\right|^2$, în care, pentru simplitate, nu am trecut decât termenii diagonali. De fapt, se poate arăta că datorită alternanţei de semn observate pe diagonala principală a matricei $\hat{A}$ aceasta are întotdeauna valori proprii atât negative cât şi pozitive, aşadar stările de perioadă dublă sunt echivalente cu nişte puncte şa.

Pentru analiza stabilităţii dinamice trebuie să scriem în mod explicit ecuaţiile care descriu dinamica deviaţiei, aşadar din ecuaţia generală

$$i\hbar\frac{d\delta g_n}{dt} = U\left|g_n\right|^2\delta g_n+Ug_n^2\delta g_n^*-K\delta g_{n+1}e^{ikd}-K\delta g_{n-1}e^{-ikd}-\mu\delta g_n$$

obţinem o ecuaţie pentru δg_a, anume

$$\begin{aligned} i\hbar\left(\frac{du_a}{dt}e^{iqnd}+\frac{dv_a^*}{dt}e^{-iqnd}\right) &= \left[\left(U\left|g_a\right|^2-\mu\right)\left(u_a e^{iqnd}+v_a^* e^{-iqnd}\right)\right. \\ &+U\left(g_a\right)^2\left(u_a^* e^{-iqnd}+v_a e^{iqnd}\right) \\ &-2Ku_b\cos\left(kd+qd\right)e^{iqnd} \\ &\left.-2Kv_b^*\cos\left(kd-qd\right)e^{iqnd}\right], \end{aligned} \tag{3.52}$$

şi o altă ecuaţie pentru δg_b, anume

$$\begin{aligned} &i\hbar\left\{\frac{du_b}{dt}e^{iq(n+1)d}\right. \\ &\left.+\frac{dv_b^*}{dt}e^{-iq(n+1)d}\right\} &= \left[\left(U\left|g_b\right|^2-\mu\right)\left\{u_b e^{iq(n+1)d}+v_b^* e^{-iq(n+1)d}\right\}\right. \\ &&+U\left(g_b\right)^2\left\{u_b^* e^{-iq(n+1)d}+v_b e^{iq(n+1)d}\right\} \\ &&-2Ku_a\cos\left(kd+qd\right)e^{iq(n+1)d} \\ &&\left.-2Kv_a^*\cos\left(kd-qd\right)e^{-iq(n+1)d}\right\}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Aceste ecuaţii trebuie rescrise sub forma a patru ecuaţii diferenţiale ordinare (reale) care descriu dinamica părţii reale şi dinamica părţii imaginare a celor două deviaţii, anume

$$i\hbar\frac{du_a}{dt} = \left(2U\left|g_a\right|^2-\mu\right)u_a+U\left(g_a\right)^2 v_a-2K\cos\left(kd+qd\right)u_b,$$

$$i\hbar\frac{dv_a}{dt} = -\left(2U\left|g_a\right|^2-\mu\right)v_a+U\left(g_a^*\right)^2 u_a+2K\cos\left(kd-qd\right)v_b,$$

$$i\hbar\frac{du_b}{dt} = \left(2U\left|g_b\right|^2-\mu\right)u_b+U\left(g_b\right)^2 v_b-2K\cos\left(kd+qd\right)u_a,$$

şi

$$i\hbar\frac{du_b}{dt} = -\left(2U\left|g_b\right|^2-\mu\right)v_b+U\left(g_b^*\right)^2u_b-2K\cos\left(kd-qd\right)v_a.$$

Pentru a determina domeniul de stabilitate, ecuaţiile precedente trebuiesc rescrise sub forma matricială

$$i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = \hat{B}\Psi, \tag{3.54}$$

unde

$$\hat{B} = U\begin{pmatrix} N_a-N_b & N_ae^{2i\varphi} & -2\frac{K}{U}\cos\theta_+ & 0 \\ -N_ae^{-2i\varphi} & N_b-N_a & 0 & 2\frac{K}{U}\cos\theta_- \\ -2\frac{K}{U}\cos\theta_+ & 0 & N_b-N_a & N_be^{2i\varphi} \\ 0 & 2\frac{K}{U}\cos\theta_- & -N_be^{-2i\varphi} & N_a-N_b \end{pmatrix}$$

cu $\theta_+ = kd+qd$ iar $\theta_- = kd-qd$. Valorile proprii ale matricei $\hat{B}$ sunt date de

$$\begin{aligned}\lambda_{\hat{B},1,2,3,4} = & \Big[\left(\nu U/K\right)^2-6\cos^2\left(kd\right)+\cos^2\left(kd-qd\right)+\cos^2\left(kd+qd\right) \\ & \mp\left(-1+\left(\nu U/K\right)^2\pm\cos\left(2kd\right)-2\cos^2\left(kd\right)\cos\left(2qd\right)\right)^{1/2} \\ & \times\left(-3+\left(\nu U/K\right)^2-\cos\left(2kd\right)+2\sin^2\left(kd\right)\cos\left(2qd\right)\right)\Big],\end{aligned}$$

aşadar pentru $\nu U/K \geq 2$ obţinem soluţii stabile atunci când

$$\begin{cases} -4+4\left[-2+\left(\nu\frac{U}{K}\right)^2\cos\left(2kd\right)-4\cos\left(4kd\right)\right]<0 \\ -2+\left(\nu\frac{U}{K}\right)^2+\cos\left(2kd\right)\left(-3+\cos\left(2qd\right)\right)>0 \end{cases}. \tag{3.55}$$

4 Ecuaţiile Schrödinger nepolinomiale

Proprietăţile statice şi dinamice ale condensatelor Bose-Einsten au fost examinate de-a lungul timpului folosind diferite specii atomice şi capcane magnetice cu geometrii dintre cele mai diverse. Deoarece soluţiile numerice ale ecuaţiei Gross-Pitaevskii sunt extrem de cronofage (a se vedea în acest sens studiile lui Adhikari *et al.* [2, 3, 4, 5, 50]) a fost acordată o atenţie specială derivării unor ecuaţii uni- şi bi-dimensionale ce pot descrie într-o manieră mai simplă (atât analitic cât şi numeric) dinamica condensatelor în formă de ţigaretă şi în formă de disc. Folosind funcţiile de probă introduse în capitolul precedent, arătăm în acest capitol cum pot fi construite ecuaţii Schrödinger nepolinomiale croite anume pentru condensate de tip ţigaretă şi de tip disc. Metoda folosită este de tip variaţional şi a fost introdusă pentru prima dată de Salasnich *et al.* [72], care a determinat două asemenea ecuaţii nepolinomiale pentru condensate de densitate scăzută. În prima parte a acestui capitol vom trece în revistă rezultatele obţinute de Salasnich *et al.* [72, 74, 73], în timp ce în a doua parte vom prezenta o ecuaţie nouă care descrie condensate în formă de ţigaretă de densitate înaltă [60].

4.1 Regimul de densitate joasă

Descrierea dinamicii axiale a unui condensat Bose-Einstein confinat de un potenţial extern cu simetrie cilindrică a fost realizată cu ajutorul unei metode variaţionale de către Salasnich *et al.* [72]. Punctul de pornire al tratamentului variaţional este ecuaţia Gross-Pitaevskii tridimensională dependentă de timp care descrie funcţia de undă macroscopică $\psi(\mathbf{r}, t)$ a condensatului

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\mathbf{r},t\right) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\left(\mathbf{r}\right)+UN\left|\psi\left(\mathbf{r},t\right)\right|^2\right]\psi\left(\mathbf{r},t\right), \quad (4.1)$$

unde $V(\mathbf{r})$ reprezintă potenţialul extern al capcanei, $U = 4\pi\hbar^2 a/m$ este amplitudinea de împrăştiere şi a este lungimea de împrăştiere între două particule, iar N reprezintă numărul de bosoni condensaţi. Funcţia de undă în acest caz este normată la 1, anume

$$\int d\mathbf{r}\left|\psi\left(\mathbf{r},t\right)\right|^2 = 1. \quad (4.2)$$

Aşa cum am văzut în capitolele precedente, ecuaţia Gross-Pitaevskii tridimensională poate fi obţinută folosind principiul acţiunii minime dacă este considerată ecuaţie Euler-Lagrange a următoarei funcţionale de acţiune:

$$S = \int dtd\mathbf{r}\psi^*\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-V\left(\mathbf{r}\right)-\frac{1}{2}gN\left|\psi\left(\mathbf{r},t\right)\right|^2\right]\psi. \quad (4.3)$$

Potenţialul extern este de forma $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\left(x^2+y^2\right)+V(z)$ datorită simetriei cilindrice, iar $V(z)$ poate fi un potenţial oarecare.

Pentru descrierea dinamicii colective a condensatelor Bose-Einstein se foloseşte în acest caz tehnica variaţională cea mai simplă, bazată pe funcţii Gaussiene, deoarece în limita unei amplitudini de împrăştiere nule acestea devin soluţiile exacte ale ecuaţiei Schrödinger.

Funcţionala de acţiune S este simplificată folosind o funcţie de undă de probă de forma:

$$\psi\left(\mathbf{r},t\right) = \phi\left(x,y,t;\sigma\left(z,t\right)\right)f\left(z,t\right) \quad (4.4)$$

unde atât ϕ cât şi f sunt normate la 1 iar ϕ este

$$\phi\left(x,y,t;\sigma\left(z,t\right)\right) = \frac{\exp\left[\frac{-\left(x^2+y^2\right)}{2\sigma\left(z,t\right)^2}\right]}{\pi^{1/2}\sigma\left(z,t\right)}. \quad (4.5)$$

Funcţiile variaţionale $\sigma(z,t)$ şi $f(z,t)$ sunt determinate prin minimizarea funcţionalei de acţiune după calcularea integralelor în planul (x,y). Pentru a calcula integralele precedente se presupune că funcţia de undă transversală ϕ variază lent de-a lungul direcţiei axiale şi se ia în considerare doar direcţia transversală, adică $\nabla^2\phi \simeq \nabla_\perp^2\phi$ unde $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Introducând funcţia de undă în ecuaţia (4.3) şi integrând spaţial după x şi y, funcţionala de acţiune devine:

$$\begin{aligned} S &= \int dtdz f^*(z,t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - V(z) - \frac{1}{2}gN\frac{\sigma^{-2}}{2\pi}|f(z,t)|^2\right. \\ &\quad \left. -\frac{\hbar^2}{2m}\sigma^{-2} - \frac{m\omega_\perp^2}{2}\sigma^2\right] f(z,t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ecuaţiile Euler-Lagrange pentru f^* şi σ sunt:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + gN\frac{\sigma^{-2}}{2\pi}|f(z,t)|^2\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\sigma^{-2} + \frac{m\omega_\perp^2}{2}\sigma^2\right)\right] f(z,t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

şi

$$\frac{\hbar^2}{2m}\sigma^{-3} - \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\sigma + \frac{1}{2}gN\frac{\sigma^{-3}}{2\pi}|f(z,t)|^2 = 0 \tag{4.8}$$

Cea de-a doua ecuaţie este o ecuaţie algebrică care se poate rezolva analitic. Soluţia obţinută arată legătura între σ şi f, adică $\sigma^2 = a_\perp^2\sqrt{1+2a_sN|f|}$ unde $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ este lungimea oscilatorului pe direcţia transversală. În acest caz σ depinde de z şi de t din cauza dependenţei de timp şi spaţiu a lui $|f|^2$.

Acest rezultat este introdus în ecuaţia (4.7), obţinându-se în final o ecuaţie Schrödinger dependentă de timp care are structura nepolinomială, anume

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f\left(z,t\right) &= \left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+V(z)+\frac{gN}{2\pi a_\perp^2}\frac{\left|f^2\left(z,t\right)\right|}{\sqrt{1+2a_sN\left|f\left(z,t\right)\right|^2}}\right.\\
&\quad +\frac{\hbar\omega_\perp}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2a_sN\left|f\left(z,t\right)\right|^2}}\right.\\
&\quad \left.\left.+\sqrt{1+2a_sN\left|f\left(z,t\right)\right|^2}\right)\right]f\left(z,t\right). \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Aşa cum a fost precizat mai devreme ecuaţia a fost introdusă în literatura de specialitate de Salasnich *et al.* [72], fiind deja folosită într-un număr mare de studii dedicate dinamicii solitonilor, undelor de şoc, undelor de densitate, etc. Ecuaţia poate fi simplificată prin neglijarea componentei longitudinale a potenţialului extern şi calcularea explicită a radicalilor de unde obţinem

$$
i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hbar\omega_r\frac{1+3a_sN\left|f\right|^2}{\sqrt{1+2a_sN\left|f\right|^2}}\right]f. \qquad (4.10)
$$

4.2 Regimul de densitate înaltă

4.2.1 Condensate cuasi-unidimensionale

Pentru un condensat Bose-Einstein în formă de ţigaretă de densitate înaltă, metoda introdusă de Salasnich *et al.* [72, 74, 73] este lipsită de acurateţe datorită ansatzului Gaussian, însă se poate obţine o ecuaţie nepolinomială similară folosind drept ansatz pentru componenta radială a funcţiei de undă funcţia q-Gaussiană discutată în capitolul precedent. Punctul de pornire este ca şi în secţiunea precedentă ecuaţia Gross-Pitaevkii şi funcţionala de acţiune asociată, a se vedea ecuaţiile (4.1) şi (4.3), cu observaţia că acum vom descompune funcţia de undă sub forma

$$
\psi\left(\mathbf{r},t\right) = \phi\left(r,t;a\left(z,t\right),q\left(z,t\right)\right)f\left(z,t\right) \qquad (4.11)
$$

unde ϕ şi f reprezintă partea longitudinală şi transversală a funcţiei de undă iar

$$\phi\left(r,t;a,q\right) \;=\; c\left(1-r^{2}a\left(1-q\right)\right)^{1/(1-q)} \tag{4.12}$$

cu a şi q funcţii de z şi de t. Acest ansatz are avantajul de a descrie la $q=1$ profilul radial de densitate mică folosit de Salasnich *et al.* [72, 74, 73], dar şi de a reda ecuaţiile hidrodinamice ale regimului Thomas-Fermi în vecinătatea lui $q=-1$ (a se vedea Ref. [56]). În cel de-al doilea caz ansatzul descrie atât partea centrală a condensatului cât şi suprafaţa acestuia, ceea ce înseamnă că funcţia şi derivatele ei se integrează cu uşurinţă şi nu există nici o singularitate în energia cinetică a condensatului. Prin normarea ansatzului radial la 1 obţinem:

$$c \;=\; \sqrt{\frac{a\left(3-q\right)}{\pi}}. \tag{4.13}$$

Presupunând ca în secţiunea precedentă că funcţia de undă transversală ϕ variază uşor de-a lungul direcţiei axiale faţă de direcţia transversală, adică

$$\nabla^{2}\phi \;\approx\; \frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}} \tag{4.14}$$

şi integrând în planul (x,y), funcţionala devine

$$\begin{aligned} S\left[f\left(z,t\right)\right] \;=\; & \int dtdzf^{*}\left(z,t\right)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right. \\ & -\frac{gN\left|f\left(z,t\right)\right|^{2}}{2}\frac{a\left(q-3\right)^{2}}{\pi\left(5-q\right)}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{2a\left(q-3\right)}{1+q} \\ & \left.-\frac{m\omega_{\perp}^{2}}{2}\frac{1}{2a\left(2-q\right)}\right]f\left(z,t\right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

putând fi uşor minimizată prin ecuaţiile Euler-Lagrange pentru $\{f,f^{*},a,q\}$. Astfel, vom avea:

$$i\hbar\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+gN\left|f\left(z,t\right)\right|^2\frac{a\left(q-3\right)^2}{\pi\left(5-q\right)}+\frac{\hbar^2}{m}\frac{a\left(3-q\right)}{1+q}+\frac{m\omega_\perp^2}{4a\left(2-q\right)}\right]f\left(z,t\right) \quad (4.16)$$

pentru f^* (împreună cu conjugata complexă pentru f),

$$\frac{gN\left|f\left(z,t\right)\right|^2}{2\pi}\frac{\left(q-3\right)^2}{\left(5-q\right)}+\frac{\hbar^2}{m}\frac{\left(3-q\right)}{1+q}-\frac{m\omega_\perp^2}{4a^2\left(2-q\right)} = 0 \quad (4.17)$$

pentru a, şi

$$\frac{gN\left|f\left(z,t\right)\right|^2}{2}\left(\frac{2a\left(q-3\right)}{\pi\left(5-q\right)}+\frac{a}{\pi}\frac{\left(q-3\right)^2}{\left(q-5\right)^2}\right) -\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{a\left(3-q\right)}{\left(1+q\right)^2}+\frac{a}{1+q}\right)+\frac{m\omega_\perp^2}{4a\left(2-q\right)^2} = 0 \quad (4.18)$$

pentru q. În timp ce ultimele două ecuaţii nu pot fi rezolvate analitic pentru o valoare arbitrară a lui N, poate fi uşor de arătat că pentru $N\gg 1$ avem

$$q \approx -1+3\left(\frac{2}{a_s\left|f\left(z,t\right)\right|^2N}\right)^{1/3} \quad (4.19)$$

$$a \approx \frac{m\omega_\perp}{8\hbar\sqrt{a_s\left|f\left(z,t\right)\right|^2N}} \quad (4.20)$$

În cele din urmă, folosind ecuaţiile (4.16), (4.19) şi (4.20) şi neglijând termeni de $\mathcal{O}(N^{-1/6})$ şi mai mici, avem:

$$i\hbar\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial t} = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\hbar\omega_\perp\left[\sqrt{a_s\left|f\left(z,t\right)\right|^2N}-\frac{2^{1/3}}{3}\left(a_s\left|f\left(z,t\right)\right|^2N\right)^{1/6}\right]\right\}f\left(z,t\right). \quad (4.21)$$

Această ecuaţie este echivalentă pentru densităţi mari cu aceea introdusă de Muñoz-Mateo şi Delgado [47, 48, 49] şi anume:

$$i\hbar\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 f\left(z,t\right)}{\partial z^2} + \hbar\omega_\perp\sqrt{1+4a_sN\left|f\right|^2 f\left(z,t\right)} \quad (4.22)$$

Spre deosebire de ecuaţia (4.21) această ecuaţie ia în considerare suprafaţa condensatului, prin coada scurtă a funcţiei q-Gaussiene. Varianta bidimensională a ecuaţiei este analizată mai jos.

Ecuaţia (4.21) va fi folosită în capitolul următor pentru determinarea perioadei undelor Faraday ce apar într-un condensat de tip ţigaretă confinat într-o capcană magnetică a cărei componentă transversală este modulată periodic în intensitate.

4.2.2 Condensate cuasi-bidimensionale

Ecuaţiile derivate în secţiunile precedente sunt ecuaţii unidimensionale ce descriu cu precizie dinamica condensatelor în formă de ţigaretă. În această secţiune prezentăm o ecuaţie bidimensională care descrie dinamica condensatelor în formă de disc pentru condensate de densităţi mari.

Pornim din nou de la ecuaţia Gross-Pitaevskii tridimensională şi funcţionala de acţiune asociată, a se vedea ecuaţiile (4.1) şi (4.3), şi un potenţial de forma

$$V\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (4.23)$$

însă acum folosim o descompunere a funcţiei de undă bazată pe un ansatz q-Gaussian *longitudinal*

$$\psi\left(\mathbf{r},t\right) = \phi\left(z,t;w\left(r,t\right),q\left(r,t\right)\right)f\left(r,t\right), \quad (4.24)$$

unde ϕ şi f reprezintă componenta axială şi transversală a funcţiei de undă iar

$$\phi\left(z,t;w,q\right) = c\left(1-\frac{z^2\left(1-q\right)}{2w^2}\right)^{1/(1-q)} \quad (4.25)$$

cu w şi q funcţii de r şi t. Subliniem ca mai devreme că acest ansatz este extrem de versatil şi poate descrie atât profilul radial de densitate joasă cât şi cel de densitate înaltă, după cum $q = 1$ corespunde ansatzului usual folosit de Salasnich *et al.,* în timp ce $q = -1$ reproduce rezultatele din regimul Thomas-Fermi. În vecinătatea lui $q = -1$ ansatzul descrie atât partea centrală a condensatului cât şi suprafaţa lui. Componenta axială a ansatzului este normată la 1, de unde rezultă

$$c = \left(\frac{1-q}{2}\right)^{1/4} \left(w\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q-3}{q-1}\right)\right)^{1/2} \tag{4.26}$$

unde $\mathbf{B}(\cdot,\cdot)$ este funcţia beta uzuală.

Presupunând că ϕ este variată uşor de-a lungul direcţiei transversale faţă de direcţia axială, adică $\nabla^2\phi \approx \partial^2\phi/\partial z^2$, şi efectuând integrarea pe axa z, funcţionala de acţiune se simplifică la

$$\begin{aligned} S[f(r,t)] = \int dtdr f^*(r,t) \Bigg[& i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & - \frac{mw^2\omega_\perp^2}{7-3q} - \frac{gN|f(r,t)|^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-q}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q-5}{q-1}\right)}{w\sqrt{2}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q-3}{q-1}\right)^2} \\ & - \frac{\hbar^2}{m}\frac{U_2\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2} - \frac{2}{q-1}, 1\right)}{w^2(3+q)} \Bigg] f(r,t). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Menţionăm că, spre deosebire de cazul cuasi-unidimensional, funcţionala de acţiune a unui condensat de tip disc conţine funcţia hipergeometrică confluentă U_2 care face imposibilă determinarea analitică a ecuaţiilor Euler-Lagrange asociate. Pentru determinarea analitică a unui set de ecuaţii Euler-Lagrange folosim aproximaţia de mai jos a funcţionalei de acţiune:

$$
\begin{aligned}
S\left[f\left(r,t\right)\right] \approx & \int dtdrf^{*}\left(r,t\right)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right.\\
& -\frac{mw^{2}\omega_{\perp}^{2}}{7-3q}++\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{1}{w^{2}}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2\left(q+1\right)}\right)\\
& \left.-\frac{gN\left|f\left(r,t\right)\right|^{2}}{2}\frac{a-b\left(q+1\right)}{w}\right]f\left(r,t\right), \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

unde a şi b sunt două constante numerice. Această funcţională poate fi uşor minimizată prin ecuaţiile Euler-Lagrange pentru $\{f,f^{*},a,q\}$ de unde obţinem

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial f\left(r,t\right)}{\partial t} = & \left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+gN\left|f\left(r,t\right)\right|^{2}\frac{a-b\left(q+1\right)}{w}-\right.\\
& \left.\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{1}{w^{2}}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2\left(q+1\right)}\right)+\frac{mw^{2}\omega_{\perp}^{2}}{7-3q}\right]f\left(r,t\right) \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

pentru f^{*} (împreună cu conjugata complexă pentru f)

$$
\begin{aligned}
& \frac{gN\left|f\right|^{2}}{2}\frac{a-b\left(q+1\right)}{w^{2}}\\
-\frac{\hbar^{2}}{mw^{3}}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2\left(q+1\right)}\right)-\frac{2mw\omega_{\perp}^{2}}{7-3q} = & \ 0 \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

pentru w, şi

$$
\frac{gN\left|f\right|^{2}b}{2\omega}+\frac{\hbar^{2}}{2mw^{2}}\frac{3}{2\left(q+1\right)^{2}}-\frac{3mw^{2}\omega_{\perp}^{2}}{\left(7-3q\right)^{2}} = 0 \qquad (4.31)
$$

pentru q. În timp ce ultimele două ecuaţii algebrice nu pot fi rezolvate analitic pentru o valoare arbitrară a lui N, poate fi arătat că pentru $N\gg1$ avem

$$
q \approx -1+\left(\frac{2^{4}5^{5}\hbar^{2}\omega_{\perp}^{2}}{27\left|f\right|^{8}m^{2}a^{4}g^{4}N^{4}}\right)^{1/9} \qquad (4.32)
$$

şi

$$w \approx \left(\frac{5}{2}\frac{a\left|f\right|^2 gN}{m\omega_\perp^2}\right)^{1/3} \tag{4.33}$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial f\left(r,t\right)}{\partial t} = & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{m}{8}\right)^{1/3}\left(\frac{5\left|f\right|^2 ag\omega_\perp N}{2}\right)^{2/3}\right. \\ & \left.+\left(3a-40b\right)\left(\frac{g\left|f\right|^2 Nh^3\omega_\perp^4}{2}\right)^{2/9} l\right] f\left(r,t\right) \end{aligned} \tag{4.34}$$

unde $l=\frac{m^{1/9}}{4\cdot a^{7/9}3^{1/3}5^{7/9}}$ şi am neglijat termenii $\mathcal{O}\left(N^{-2/9}\right)$ şi mai mici.

5 Unde de densitate

Rezonanţele parametrice extinse sunt una din temele recurente în dinamica gazelor cuantice. După investigaţiile iniţiale din Ref. [27] şi după predicţia teoretică ulterioară a undelor Faraday în condensate Bose-Einstein forţate parametric [77, 78] acestea au primit atenţie constantă [40]. Observarea experimentală a undelor Faraday în condensate Bose-Einstein cu ^{87}Rb în formă de ţigaretă [21] şi celule de ^{4}He supuse la vibraţii verticale [1], precum şi modularea experimentală a lungimii de împrăştiere a unui condensat Bose-Einstein cu ^{7}Li [68] reprezintă un stimul suplimentar care a catalizat intens studiile în domeniu. O privire atentă asupra literaturii recentă pentru sisteme bosonice arată un număr mare de publicaţii pe teme diverse precum corecţia neliniară la frecvenţele modurilor colective ale unui condensat Bose-Einstein [86], formalismul "path-integral" pentru dinamica gazelor bosonice (vezi Ref. [6, 7] pentru o privire de ansamblu mai detaliată), excitaţia parametrică de "cicatrice" în condensate Bose-Einstein [37], îndepărtarea completă a excitaţiilor în condensate Bose-Einstein supuse la potenţiale periodice dependente de timp [79] şi formarea de striaţii Faraday în condensate Bose-Einstein de densitate joasă, densitate înaltă şi dipolare [57, 60, 51].

Investigaţii asupra proprietăţilor condensatelor Bose-Einstein încărcate în reţele optice [46] au relevat o gamă largă de fenomene neliniare cum ar fi bucle în structura de bandă a condensatului, trenuri de solitoni şi stări de perioadă dublă [90, 43]. Suprimarea de unde Faraday în condensate Bose-Einstein încărcate în reţele optice puternice, în particular, a fost arătată prin simulari numerice în Ref. [14] folosind în special un gaz omogen. Pe partea fermionică, proprietăţile undelor Faraday au fost discutate în Ref. [14, 81] şi amplificarea de separare spin-sarcină în sisteme fermionice unidimensionale prin intermediul rezonanţei parametrice a fost arătată în Ref. [29].

În acest capitol vom studia apariţia undelor de densitate în condensate Bose-Einstein forţate parametric. Motivaţi de rezultate experimentale re-

cente vom analiza dinamica unui condensat de densitate mare în formă de ţigaretă confinat într-o capcană magnetică a cărei componentă radială variază periodic în intensitate. Arătăm în acest capitol formarea undelor Faraday longitudinale pentru aproape orice frecvenţă de forţaj a tăriei componentei radiale a capcanei magnetice. Pentru situaţia particulară a unei frecvenţe de forţaj egală cu frecvenţa componentei radiale a capcanei magnetice arătăm în acest capitol că undele longitudinale excitate sunt diferite de undele Faraday având o perioadă cu mult mai mică decât a acestora şi o frecvenţă egală cu frecvenţa de forţaj.

În descrierea undelor de densitate vom utiliza o metodă variaţională similară celor introduse în Capitolul 2 ce are la bază o funcţie q-Gaussiană cu ajutorul căreia descriem componenta radială a funcţiei de undă. Unda propriu zisă de densitate este descrisă prin intermediul unei funcţii cosinusoidale de tipul $(1+(u(t)+iv(t))\cos kz)$ altoită pe componenta radială a funcţiei de undă. De asemenea, vom folosi către finalul capitolului ecuaţia nepolinomială derivată în capitolul precedent pentru condensate de densitate înaltă pentru a arăta limitarea acestor ecuaţii care nu pot surprinde analitic nici formarea undelor Faraday în condensate fără omogenitate longitudinală, nici formarea undelor rezonante prin intermediul transferului de energie între modul radial şi unda longitudinală.

5.1 Tratament variaţional

Punctul de pornire al prezentului tratament variaţional îl reprezintă densitatea Lagrangianului unui condensat Bose-Einstein prins în capcană magnetică

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{r},t) &= \frac{i}{2}\left(\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left|\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right|^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\left|\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right|^2+V(\mathbf{r},t)\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^2+\frac{g(t)N}{2}\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^4 \quad (5.1)\end{aligned}$$

în care vom folosi următoarea funcţie de undă de probă

$$\psi(r,z,t) = \left[\frac{k\,(3-q)}{2\pi^2\,(2+u(t)^2+v(t)^2)\,w(t)^2}\right]^{1/2}\left[1-\frac{r^2\,(1-q)}{2w^2(t)}\right]^{1/1-q} \times \exp\left(ir^2\alpha(t)\right)\left[1+(u(t)+iv(t))\cos(kz)\right]. \quad (5.2)$$

Funcţia de undă este compusă din: *i.*) o componentă radială q-Gaussiană care are ca parametrii variaţionali lăţimea radială a condensatului $w(t)$ şi variabila q care descrie curbura funcţiei de undă, *ii.*) o undă cosinusoidală de densitate care are ca parametrii variaţionali partea reală $u(t)$ şi cea imaginară $v(t)$ a amplitudinii, *iii.*) faza $\alpha(t)$ asociată lăţimii radiale a condensatului şi *iv.*) o funcţie introdusă de condiţia de normare

$$\int_{\pi/k}^{-\pi/k} dz\,|\psi(r,z,t)|^2 = 1. \quad (5.3)$$

Componenta radială a funcţiei de undă se poate integra relativ uşor folosind rutina `Integrate` din MATHEMATICA, iar după efectuarea banalei integrări longitudinale obţinem următorul Lagrangian:

$$L(t) = -\frac{gkN(q-3)^2\left(8+3u^4(t)+8v^2(t)+3v^4(t)+6u^2(t)(4+v^2(t)\right)}{16\pi^2(q-5)\left(2+u^2(t)+v^2(t)\right)^2 w^2(t)} + \frac{m\Omega^2(t)w^2(t)}{4-2q} + \frac{\hbar}{m}\left(\frac{k^2}{2}-\frac{1}{2+u^2\,(t)+v^2\,(t)}-\frac{q-3}{(1+q)\,w^2\,(t)} - \frac{4w^2\,(t)\,\alpha^2\,(t)}{q-2}\right) + \frac{\hbar\,(-v(t)\dot{u}(t)+u(t)\dot{v}(t))}{2+u^2(t)+v^2(t)} - \frac{\hbar w^2(t)\dot{\alpha}(t)}{q-2}. \quad (5.4)$$

Ansatzul nostru (şi Lagrangianul asociat) acoperă condensate Bose-Einstein în formă de ţigaretă omogene longitudinal. Tratamente mai fine includ o anvelopă longitudinală pentru a acoperi capcanele longitudinale slabe care există în multe cazuri experimentale. În acest caz omitem însă anvelopa longitudinala (finită) datorită rezonanţei false care apare între lungimea condensatului şi perioada undei de suprafaţă. Aplicând ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

cu $y \in \{q, w, \alpha, v, u\}$ obţinem următoarele ecuaţii variaţionale

$$\frac{(7-q)(3-q)\rho g}{2\pi(q-5)^2} - \frac{4\hbar^2}{m(1+q)^2} + \frac{m\Omega^2(t)w^4(t)}{(q-2)^2} = 0 \qquad (5.6)$$

pentru q şi

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= \frac{1}{2\hbar w(t)}(q-2)\left[\frac{g\,(q-3)^2\,\rho}{2\pi(q-5)w^3(t)} - \frac{m\Omega^2(t)w(t)}{q-2}\right. \\
&\left. + \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{q-3}{(1+q)\,w^3\,(t)} - \frac{4w\,(t)\,\alpha^2\,(t)}{q-2}\right)\right] \qquad (5.7)\\
\dot{w}(t) &= \frac{2\hbar w(t)\alpha(t)}{m} \qquad (5.8)\\
\dot{v}(t) &= \frac{g(q-3)^2\rho u(t)}{\hbar\pi(q-5)w^2(t)} - \frac{\hbar k^2}{2m}u(t) \qquad (5.9)\\
\dot{u}(t) &= \frac{\hbar k^2}{2m}v(t) \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

pentru w,α ,u şi v, respectiv. Ecuaţiile (5.7)-(5.10) descriu dinamica părţii centrale şi formarea undelor de densitate pentru un condensat arbitrar ales, distribuţia densităţii radiale a părţii centrale fiind stabilită de q prin ecuaţia (5.6). Natura algebrică a ecuaţiei (5.6) care stabileşte distribuţia densităţii radiale se datorează faptului că variabila q nu are o variabilă canonică conjugată, variabilă pe care noi am omis-o intenţionat din motive de maleabilitate analitică. De fapt, cea mai mică modificare adusă ansatzului din ecuaţia (5.2) nu ne mai permite să calculăm analitic integralele transversale, caz în care rămanem cu metodele variaţionale directe care au aceeaşi lipsă de transparenţă ca soluţiile numerice ale ecuaţiei Gross-Pitaevskii. O discuţie detaliată pe soluţiile ecuaţiei (5.6) este prezentată în Ref. [56]. Menţionăm că pentru $q = 1$ ecuaţia (5.7) se reduce la

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{g\rho}{4\pi w^4(t)} - \frac{\Omega^2(t)}{2} - 2\alpha^2(t) + \frac{1}{2w^4(t)} \qquad (5.11)$$

şi a fost folosită în Ref. [53] pentru a descrie formarea undelor rezonante în condensate de densitate joasă, în timp ce pentru $q = -1$ ultimul termen

în ecuaţia (5.7) devine singular. Această singularitate corespunde divergenţei energiei cinetice în apropierea suprafeţei condensatului discutată în Sectiunea 1.3.2 şi este specifică aproximaţiei Thomas-Fermi. Distribuţia densităţii radiale a părţii centrale are un impact mic asupra formării undelor de densitate longitudinale aşa cum putem vedea din dinamica lui $v(t)$ pentru $q = 1$

$$\dot{v}(t) = -\frac{g\rho u(t)}{\pi w^2(t)} - \frac{k}{2}u(t) \tag{5.12}$$

şi $q = -1$

$$\dot{v}(t) = -\frac{8g\rho u(t)}{3\pi w^2(t)} - \frac{k^2}{2}u(t) \tag{5.13}$$

În afara rezonanţei radiale, adică $\omega \neq \Omega$, putem aproxima soluţia ecuatiilor (5.7) şi (5.8) prin

$$w(t) \approx \left[\frac{\left(6-5q+q^2\right)\left(gm\rho(3+2q-q^2)+2\pi\hbar^2\left(5-q\right)\right)}{2\pi m^2\Omega^2\left(5+4q-q^2\right)\left(1+\epsilon\sin t\omega\right)^2}\right]^{1/4} \tag{5.14}$$

Folosind aproximaţia precedentă în ecuaţia care descrie dinamica lui $\dot{v}(t)$ putem rescrie uşor ecuaţiile (5.9) şi (5.10) sub forma ecuaţiei Mathieu generale

$$\ddot{u}(t) + u(t)(a(k,\omega) + b(k,\omega)\sin 2\tau) = 0 \tag{5.15}$$

unde

$$a(k,\omega) = \frac{k^2\hbar}{\omega^2 m}\left(\frac{k^2\hbar}{2m} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\rho g\Omega\left(q-3\right)^{3/2}}{\hbar(q-5)} \times\sqrt{\frac{(q-5)(1+q)}{\sqrt{(q-2)\left(gm\rho(q-3)(1+q)+2\pi\hbar^2(q-5)\right)}}}\right) \tag{5.16}$$

$$b(k,\omega) = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2mk^2\epsilon g\rho\Omega\left(q-3\right)^{3/2}}{\omega^2\hbar(q-5)} \tag{5.17}$$

$$\times\sqrt{\frac{(q-5)(1+q)}{(q-2)\left(gm\rho(q-3)(1+q)+2\pi\hbar^2(q-5)\right)}} \tag{5.18}$$

şi $\omega t = 2\tau$.

Undele observate experimental corespund celor mai instabile soluţii ale ecuaţiei (5.15). Vom arăta mai jos că pentru valori pozitive mici ale lui $b(k,\omega)$ aceste unde corespund lui $a(k,\omega) = 1$ [44]. De asemenea, vom arăta mai jos că pentru valori mici ale lui $b(k,\omega)$ ecuaţia (5.15) are soluţii de forma $\sin(\sqrt{a}\tau)$ şi $\cos(\sqrt{a}\tau)$, asa că cele mai instabile soluţii au o frecventa proprie egala cu jumătate din frecvenţa de forţaj. Aceste unde au o istorie lungă care merge înapoi la "frumoasele forme observate pe nisip, umpluturi, sau alte granule plasate pe placi vibrante", ale lui Ernst Chladni, "care sunt aşa de uimitoare că rămân în minţile celor care le-au văzut", la experimentele lui Hans Christian Ørsted cu pulberi uşoare de lycopodium, şi "unduirile" lui Michael Faraday văzute în fluide în contact cu suprafeţe vribrante [24]. Deoarece Michael Faraday a dedicat mai multe studii formării acestor unde/striaţii aducând contribuţii substanţiale în domeniu, aceste unde/striaţii îi poartă acum numele. Exemplul tipic de formare a unei striaţii Faraday este următorul: se ia un vas umplut cu un strat subţire de lichid care este apoi oscilat pe direcţie verticală. Pentru amplitudini suficient de mari o instabilitate de undă de suprafaţă generează striaţii ce oscilează la o frecvenţă egală cu jumătate din frecvenţa de forţaj.

Unda Faraday este cea mai instabilă undă de densitate în afara rezonanţei, dar în vecinătatea lui $\omega = \Omega$ aproximaţia pentru $w(t)$ nu funcţionează, ecuaţia (5.15) include contribuţia armonicilor superioare (de amplitudini foarte mici) şi apare o undă de densitate diferită. Această undă de densitate apare datorită transferului rezonant de energie [58] între partea centrală a condensatului şi unda de densitate, fiind necesar ca frecvenţa undei de densitate să fie egală cu frecvenţa radială a capcanei magnetice, aşadar $a(k,\omega) = 2^2$.

Rezolvând analitic $a(k,\omega) = n^2$ găsim

$$
\begin{aligned}
k &= \Big\{\Big(\sqrt{2}g(3-q)^{3/2}\Omega\rho\sqrt{-H(q)(1+q)(g\rho(3-q)(q-1)+2\pi(q-5))} \\
&\quad -\big\{(H(q)(g\rho(q-3)(1+q)+2\pi(q-5))(2g^2\Omega^2\rho^2(q-3)^3(1+q) \\
&\quad +gn^2\pi\rho\omega^2H(q)(q-3)(1+q)+2n^2\pi^2\omega^2(q-5)^2(q-2)\big\}^{1/2}\Big)\Big\}^{1/2} \\
&\quad \times\Big(\pi^{1/4}H(q)(g\rho(q-3)(1+q)+2\pi(q-5))\Big)^{-1} \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

unde $H(q) = (5-q)(2-q)$. Relaţii de dispersie similare au fost obţinute în Ref. [57, 60] pentru unde Faraday (adică, $n = 1$) prin perturbarea stării de bază a unui condensat Bose-Einstein în formă de ţigaretă. Cea mai apropiată relaţie de dispersie de cea obţinută mai sus este aceea obţinută în Ref. [60], anume

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\omega_\perp m}{\hbar}}\left\{2\gamma^{1/6}\left(2^{1/3}-9\gamma^{1/3}\right)\right. \\
&\quad \left.+\sqrt{4\gamma^{1/3}\left(2^{1/3}-9\gamma^{1/3}\right)^2+81\frac{\omega^2}{\omega_\perp^2}}\right\}, \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

unde γ este densitatea liniară a condesatului, deoarece atât tratamentul din acest capitol cât şi acela din Ref. [60] folosesc o funcţie q-Gaussiană pentru profilul radial de densitate. Aceste relaţii, totuşi, se bazează pe o funcţie de undă care nu este normată şi care nu minimizează Lagrangianul, prin urmare rezultatele sunt puţin fortuite.

5.2 Ecuaţia Mathieu

În această secţiune vom prezenta pe larg proprietăţile ecuaţiei Mathieu folosite în secţiunea precedentă. Această ecuaţie este una din ecuaţiile fundamentale ale fizicii matematice, fiind numită după Emile Leonard Mathieu. Deşi ecuaţia pare simplă, nu are soluţie analitică exactă, existând totuşi rezultate asupra formei acestor soluţii şi a stabilităţii lor. Cel mai important rezultat este teorema Floquet care indică perioada soluţiilor ecuaţiei Mathieu. Dată fiind importanţa ecuaţiei Mathieu în studiul undelor de densitate am împărţit prezenta secţiune în două subsecţiuni: una dedicată teoremei Floquet şi alta dedicată determinării coeficienţilor caracteristici.

5.2.1 Teorema Floquet

În forma cea mai elementară, teorema Floquet spune că soluţiile unui set de ecuaţii ordinare diferenţiale liniare cu coeficienţi periodici au aceeaşi perioadă ca cea a coeficienţilor. Mai riguros, teorema se citeşte după cum urmează:

> **Teorema Floquet**: dacă $\phi(t)$ este o soluţie matriceală fundamentală a sistemului periodic de perioada T
>
> $$\dot{x} = A(t)\, x$$
>
> atunci pentru toţi $t \in R$
>
> $$\phi(t+T) \quad = \quad \phi(t)\, \phi^{-1}(0)\, \phi(T).$$
>
> În plus, există o matrice B (care poate fi complexă) astfel încât
>
> $$\exp(TB) \quad = \quad \phi^{-1}(0)\, \phi(T)$$
>
> şi o funcţie matriceală periodică de perioada T $t \mapsto P(t)$ (care poate fi complexă) astfel încât $\phi(t) = P(t) \exp(tB)$ pentru toţi $t \in R$. De asemenea, există o matrice reală R şi o funcţie matriceală periodică de perioada $2T$ reală $t \mapsto Q(t)$ astfel încât $\phi(t) = Q(t) \exp(tR)$ pentru toţi $t \in R$.

În fizica materiei condensate acest rezultat este bine cunoscut din studiul soluţiilor periodice ale ecuaţiilor Schrödinger liniare cu potenţiale periodice, aşa numitele stări Bloch, care pot fi descompuse într-o undă plană şi o funcţie periodică care are aceeaşi perioadă ca potenţialul. Rezultatul este de asemenea bine cunoscut în teoria cinematică a reacţiilor chimice.

În cazul ecuaţiei Mathieu, teoria Floquet ne informează că soluţia generală este de forma

$$x(t) \quad = \quad \exp(i\mu t)\, g(t)$$

unde $g(t)$ are aceeaşi perioadă ca $\sin(2t)$ şi μ este în general complex. Soluţiile stabile corespund la $\mathrm{Im}[\mu] \geq 0$, în timp ce cele instabile corespund la $\mathrm{Im}[\mu] < 0$. În figura 5.1 am descris structura de bandă a ecuaţiei Mathieu, indicând atât regiunea stabilă cât şi cea instabilă. Pentru a măsura gradul de instabilitate al regiunii instabile am prezentat in figura 5.1 mai multe linii de contur ale $\mathrm{Im}[\mu]$.

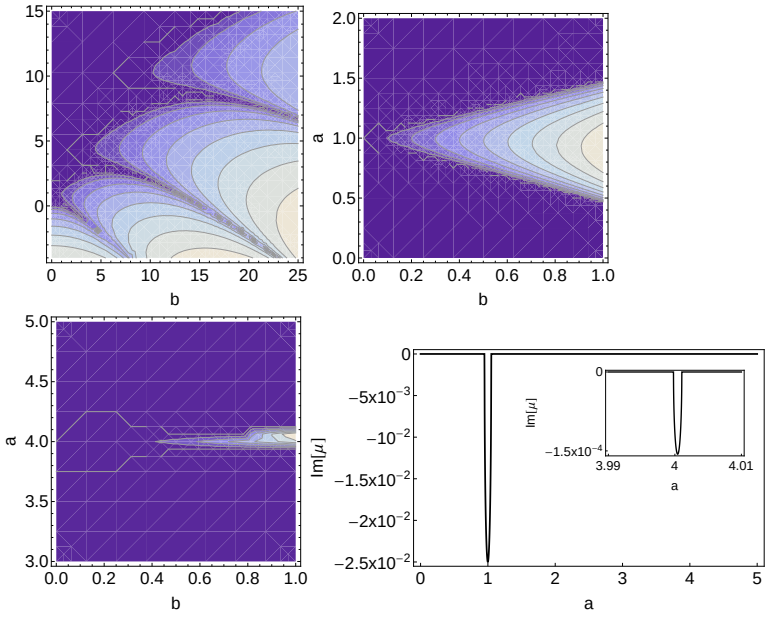

Figura 5.1: Coeficientul caracteristic al ecuaţiei Mathieu obţinut numeric cu MATHEMATICA folosind funcţia `MathieuCharacteristicExponent`. În graficul din stânga sus vedem partea imaginară a coeficientului caracteristic pentru o plaja largă a parametrilor, în timp ce graficul din dreapta sus şi cel din stânga jos arată partea imaginară a coeficientului caracteristic pentru cele mai instabile două zone (care corespund lui $a = 1^2$ si $a = 2^2$). Graficul din dreapta jos arată dependenţa de a a părţii imaginare a coeficientului caracteristic, fiind evident că lobul instabil centrat în jurul lui $a = 1^2$ este mult mai instabil decât cel centrat in jurul lui $a = 2^2$.

Pentru determinarea analitică a celei mai instabile soluţii a ecuaţiei Mathieu este necesară o formulă analitică pentru $\mu(a, b)$, însă aceste formule nu există, din păcate în general. Pentru valori mici ale lui b există însă două clase distincte de formule. Prima clasă, datorată lui J. C. Adams şi

G. W. Hill [33], conţine formule explicite pentru $\mu(a,b)$, în timp ce a doua clasă, datorată în mare parte lui E. T. Whittaker şi Ince [87, 88, 34, 35], conţine formule implicite pentru $\mu(a,b)$.

5.2.2 Coeficienţi caracteristici

Referinţa clasică pentru ecuaţia Mathieu este "Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune" a lui Tisserand[82] care începe după cum urmează:

"Sa studiem ecuaţia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(q^2 + 2q_1\cos 2t\right) = 0.$$

Această ecuaţie este un caz foarte particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi periodici care sunt consideraţi la modul general de M. E. Picard şi M. Floquet. Pentru a stabili aceste proprietăţi într-un mod simplu, adoptăm prezentarea simplă a lui M. Callandreau".

Tisserand urmează metoda invocată de Hill şi obţine clasica formulă de ordin 4:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[1 - \frac{q_1^4\pi^2}{32q^2\left(1-q^2\right)^2} + \mathcal{O}\left(q_1^6\right)\right]\cos q\pi\right. \\ &+ \left.\left[-\frac{q_1^2\pi}{4q\left(1-q^2\right)} + \frac{15q^4 - 35q^2 + 8}{64q^3\left(1-q^2\right)^3\left(4-q^2\right)}q_1^4\pi + \mathcal{O}\left(q_1^6\right)\right]\sin q\pi\right\}.\end{aligned}$$

Pentru a obtine formula precedentă descompunem pe $x(t)$ într-o serie de unde plane modulate de factorul exponential indicat de teorema Floque, adică

$$x(t) = \exp(i\mu t)\sum f_n \exp(i2nt). \tag{5.21}$$

Introducând $x(t)$ în ecuaţia (5.15) şi egalând coeficienţii puterilor lui $\exp(i2t)$ obţinem

$$-f_n(\mu + 2n)^2 + af_n + \frac{b}{2i}\left(f_{n-1} - f_{n+1}\right) = 0. \tag{5.22}$$

Aceste ecuaţii determină coeficientii f_n considerând ca μ este cunoscut. Condiţia pentru soluţia netrivială a lui a este că $\triangle(\mu)$, determinantul matricei de coeficienţi, să fie egal cu 0, adică

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & -p^2+a & -\frac{b}{2i} & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \frac{b}{2i} & -\left(p+2^2\right)+a & -\frac{b}{2i} & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & \frac{b}{2i} & -(p+4)^2+a & -\frac{b}{2i} & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & \frac{b}{2i} & -(p+6)^2+a & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \tag{5.23}$$

unde $p = \mu + 2n$. Vedem acum că principalele dificultăţi tehnice în calcularea exponentului critic constau în evaluarea acestui determinant infinit. Calculul analitic al acestui determinant reprezintă în continuare o problemă provocatoare, aproximaţiile curente trunchiind determinatul la primele zece, douăzeci de linii şi coloane centrale. În cazul particular $b \ll 1$ se poate arată că neglijând termenii de ordinul lui b^4 obţinem

$$\mu = \frac{1}{\pi}\arccos\left[\cos\left(\pi\sqrt{a}\right) + \frac{\pi b^2 \sin\left(\pi\sqrt{a}\right)}{16\sqrt{a}\,(a-1)} + \mathcal{O}\left(b^4\right)\right], \tag{5.24}$$

în timp ce o evaluare a termenilor neglijaţi anterior reproduce rezultatul prezentat de Tisserand.

Găsirea celei mai instabile soluţii este echivalentă cu determinarea maximului expresiei

$$\cos\left(\pi\sqrt{a}\right) + \frac{\pi b^2 \sin\left(\pi\sqrt{a}\right)}{16\sqrt{a}\,(a-1)}. \tag{5.25}$$

Pentru valori mici ale lui b, expresia precedentă ajunge la extrem pentru $a = 1$, prin urmare

$$\mu_2 \approx \frac{-\sqrt{b^2 - 4\,(a-1)^2}}{4} \tag{5.26}$$

unde $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. În cele din urmă, se observă că domeniul de instabilitate este dat de

$$I_a = \left[1 - \frac{b}{2}, 1 + \frac{b}{2}\right] \tag{5.27}$$

şi că dimensiunea acestuia creşte cu b.

5.3 Rezultate numerice

Rezolvând numeric ecuaţiile (5.7)-(5.10) folosind o metoda Runge-Kutta obţinem dinamica centrului condensatului şi cea a undei de densitate. Analizând

$$A(t) = n(0,t) - n\left(\frac{\pi}{k}, t\right) \tag{5.28}$$

$$= \frac{4ku(t)}{\pi\left(2 + u^2(t) + v^2(t)\right)} \tag{5.29}$$

unde

$$n(z,t) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}w(t)}{\sqrt{1-q}}} dr 2\pi r \left|\psi\right|^2 \tag{5.30}$$

vedem că $u(t)$ este un bun indicator pentru formarea undelor de densitate. Prin urmare, pentru a analiza apariţia undei Faraday şi a celei rezonante reprezentăm grafic în figurile 5.2-5.5 $u(t)$ pentru două unde, chiar la sau în vecinătatea rezonanţei radiale folosind o configuraţie experimentală reală cu $N = 5 \cdot 10^5$ atomi de ^{87}Rb, $L = 180\mu$m, $\Omega = 160.5(2\pi)$ Hz şi $\epsilon = 0.1$. Aceste valori corespund celor folosite în Ref. [21], cu diferenţa că noi am considerat pentru simplitate un condensat cu omogenitate longitudinală şi am calculat întinderea condensatului folosind o aproximatie Thomas-Fermi. Distribuţia radială a fost determinată din soluţia numerică a ecuaţiei (5.6) ce duce la o valoare de echilibru $q = 0.0822$ care indică aflarea condensatului în regimul de densitate înaltă [56].

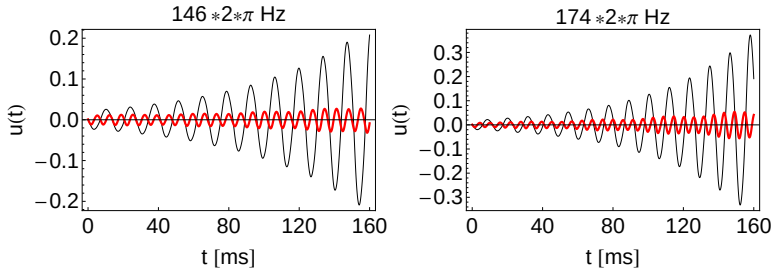

Figura 5.2: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday şi unda rezonantă în cazul experimental $N = 5 \cdot 10^5$ atomi de ^{87}Rb, $L = 180\mu$m, $\Omega = 160.5(2\pi)$ Hz şi $\epsilon = 0.1$ pentru $\omega = 146(2\pi)$ Hz şi $\omega = 174(2\pi)$ Hz respectiv. De reţinut în ambele figuri că unda Faraday apare considerabil mai repede decât unda rezonantă şi prezintă o explozie exponentială bruscă.

Mesajul principal transmis de figurile precedente este că pentru frecvenţe de modulaţie diferite de frecvenţa capcanei radiale, undele Faraday apar mai repede decât cele rezonante, în timp ce chiar la rezonanţă unda rezonantă creşte exponenţial şi ascunde unda Faraday. Într-o vecinătate a rezonanţei cele două sunt la fel de instabile. Calculând $s_F/s_R = k_R/k_F$ folosind ecuţia (5.19), anume raportul dintre perioada undei Faraday şi cea a undei rezonante, se vede că pentru toate frecvenţele de interes perioada undei Faraday este de aproximativ de două ori cea a undei rezonante. Pentru a observa mai bine formarea celor două unde de densitate prezentăm în figurile următoare evoluţia în timp a profilului de densitate al condensatului pentru fiecare din cele două unde. Astfel, în coloana din stânga reprezentăm unda Faraday, în timp ce în coloana din dreapta reprezentăm unda rezonantă pentru $\omega = 146(2\pi)$ Hz (figura 5.6), $\omega = 152(2\pi)$ Hz (figura 5.7) şi $\omega = 160(2\pi)$ Hz (figura 5.8). Menţionăm că rezultatele de mai jos au fost obţinute pentru un condensat cu omogenitate longitudinală (deci fără o dimensiune longitudinală specifică), opţiunea de a prezenta profilul condensatului pentru zece maxime ale undei Faraday fiind făcută doar pentru a spori claritatea figurii.

Să subliniem ca modelul nostru nu descrie interacţiunea reală dintre cele două unde ci doar surprinde formarea de unde de densitate individuale. De fapt, datele experimentale împrăştiate raportate în Ref. [21] pentru perioada observată a undei de densitate înainte şi după rezonanţă arată coexistenţa celor două unde, în timp ce modelul nostru arată doar că cele

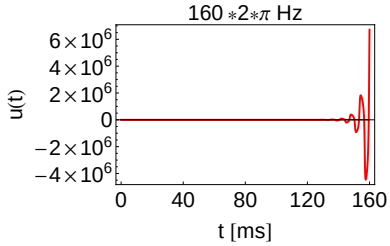

Figura 5.3: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday şi unda rezonantă pentru $\omega = 160(2\pi)$ Hz. Aceleaşi setări experimentale ca mai sus. De reţinut că unda rezonantă apare exponenţial mai repede şi ascunde complet unda Faraday. Acest comportament este tipic forţajului rezonant şi este datorat unui transfer rezonant de energie între modul colectiv al părţii centrale şi unda de suprafaţă emergentă.

două unde au instabilităţi asemănătoare în timp. Un model mai precis ar trebui să includă două unde de densitate de perioade arbitrare, dar un astfel de model duce la o ecuaţie de tipul Whittaker-Hill pentru care exponenţii Floquet (şi apoi soluţiile instabile) nu sunt cunoscuţi analitic. Modelul variaţional actual reprezintă un compromis între tractabilitatea analitică a unei componente a undei de densitate şi descrierea exactă a dinamicii centrului condensatului.

Prezentăm în cele din urmă în figura 5.9 dependenţa perioadei undei de densitate de frecvenţa de fortaj, incluzând în figura 5.9 atât rezultatele obţinute din relaţiile de dispersie ale ecuaţiilor nepolinomiale din Refs. [57, 60] cât şi relaţia de dispersie din ecuaţia (5.19). Observăm că toate relaţiile de dispersie obţinute reproduc cu acurateţe relativ bună perioada undei Faraday însă numai tratamentul variaţional introdus în Ref. [69] şi prezentat pe larg la începutul acestui capitol reproduce cu acurateţe unda rezonantă.

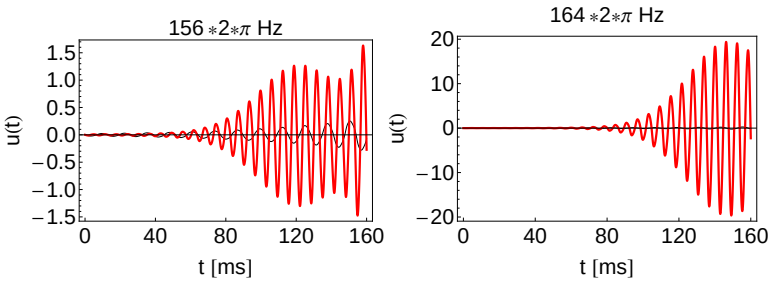

Figura 5.4: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday şi rezonantă la $\omega = 156(2\pi)$ Hz şi $\omega = 164(2\pi)$ Hz respectiv. Aceleaşi setări experimentale ca în Fig. 5.2. De reţinut în ambele figuri că unda Faraday şi rezonantă au instabilitate comparabilă în timp, chiar dacă unda rezonantă apare ceva mai repede. Cele două figuri aparţin datelor experimentale împrăştiate pentru perioada observată a undei de suprafaţă înainte şi după rezonanţă care au fost raportate în Ref. [21]

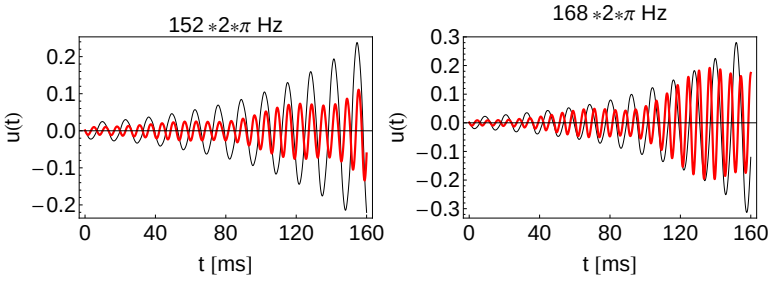

Figura 5.5: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday şi unda rezonantă la $\omega = 152(2\pi)$ Hz şi $\omega = 168(2\pi)$ Hz respectiv. Aceleaşi setări experimentale ca în Fig. 5.2. De reţinut în ambele figuri că unda Faraday şi unda rezonantă au instabilitate asemănătoare în timp şi niciuna dintre unde nu are o explozie exponenţială.

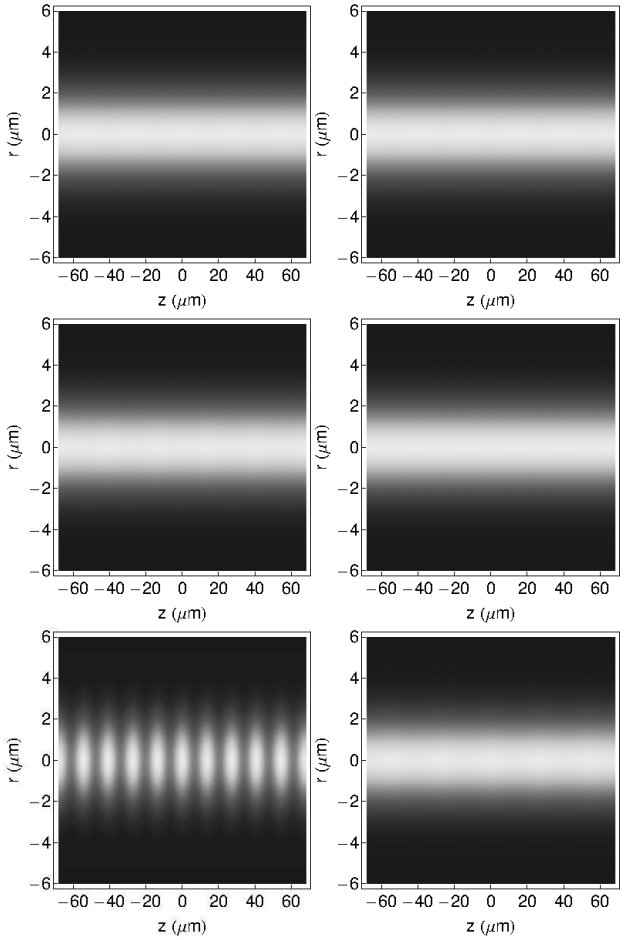

Figura 5.6: Profilul de densitate al unui condensat cu omogenitate longitudinală prins într-o capcană magnetică radială de frecvenţă $\Omega = 160.5(2\pi)$ Hz care descrie cu acurateţe configuraţia experimentală folosită de Engel *et al.*[21]. Componenta radială a capcanei magnetice este modulată folosind un forţaj de forma $\Omega(t) = \Omega(1+\epsilon \sin \omega t)$, unde $\epsilon = 0.1$ si $\omega = 146(2\pi)$ Hz. Pe coloana din stânga arătăm evoluţia undei Faraday la $t = 20$ms (figura de sus), $t = 80$ ms (figura din mijloc) şi $t = 250$ ms (figura de jos), în timp ce pe coloana din dreapta arătăm evoluţia undei rezonante la aceleaşi momente de timp.

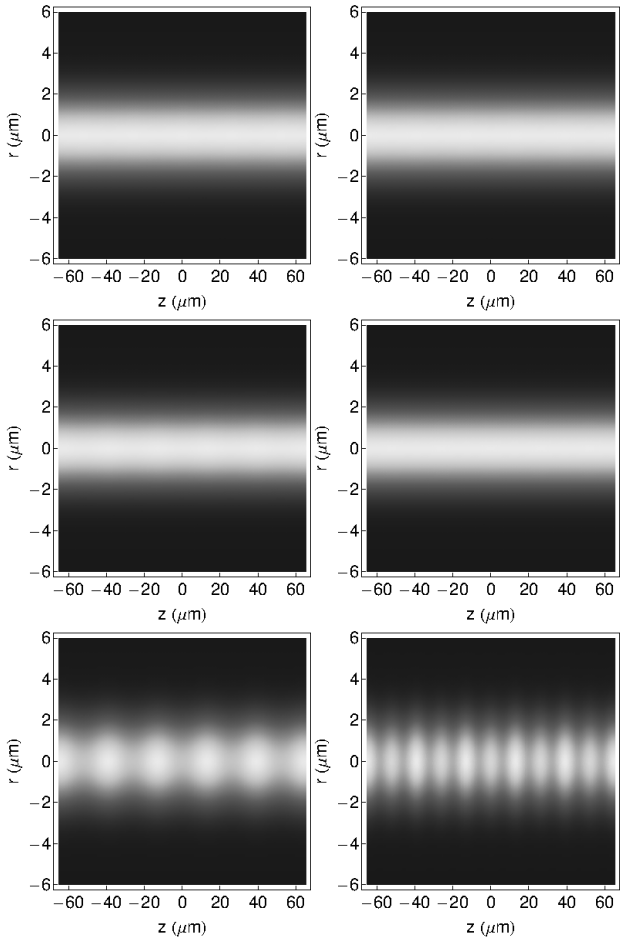

Figura 5.7: Profilul de densitate al unui condensat identic cu cel considerat în figura 5.6 pentru o frecvenţă de forţaj $\omega = 152(2\pi)$ Hz. Pe coloana din stânga arătăm evoluţia undei Faraday la $t = 20$ms (figura de sus), $t = 80$ ms (figura din mijloc) şi $t = 250$ ms (figura de jos), în timp ce pe coloana din dreapta arătăm evoluţia undei rezonante la aceleaşi momente de timp.

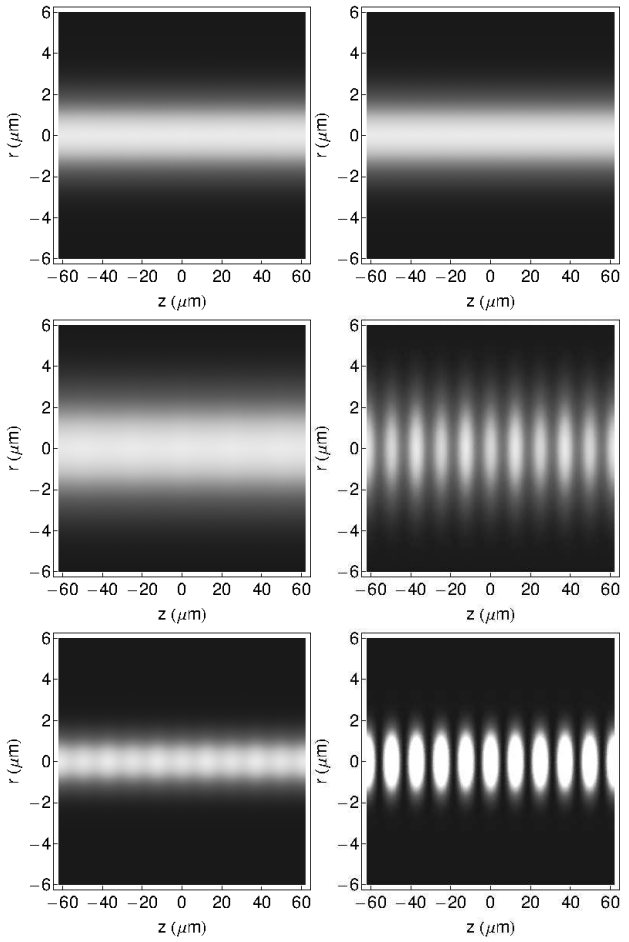

Figura 5.8: Profilul de densitate al unui condensat identic cu cel considerat în figura 5.6 pentru o frecvenţă de forţaj $\omega = 160(2\pi)$ Hz. Pe coloana din stânga arătăm evoluţia undei Faraday la $t = 20$ms (figura de sus), $t = 80$ ms (figura din mijloc) şi $t = 250$ ms (figura de jos), în timp ce pe coloana din dreapta arătăm evoluţia undei rezonante la aceleaşi momente de timp.

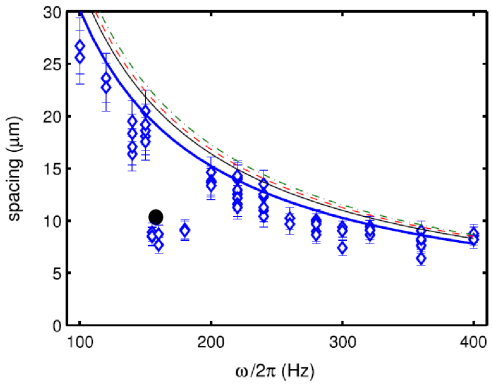

Figura 5.9: Perioada undei de densitate funcţie de frecvenţa de fortaj. Punctele experimentale şi curbele teoretice ce urmează trendul descendent corespund undei Faraday în timp ce punctele izolate în jurul frecveţei $160.5(2\pi)$ Hz corespund undei rezonante. Relaţiile de dispersie obţinute în Refs. [57, 60] reproduc la nivel calitativ datele experimentale aferente undei Faraday (a se vedea curbele de culoare negră, roşie, verde şi albastră), însă numai modelul variaţional prezentat în acest capitol reproduce şi unda rezonantă (a se vede puntul negru).

Bibliografie

[1] H. Abe, T. Ueda, M. Morikawa, Y. Saitoh, R. Nomura şi Y. Okuda, Phys. Rev. E, **76**, 046305 (2007).

[2] S.K. Adhikari, Phys. Rev. E, **62**, 2937 (2000).

[3] S.K. Adhikari, Phys. Lett. A, **265**, 91 (2000).

[4] S.K. Adhikari şi P. Muruganandam, J. Phys. B: At. Mol. Opt., **35**, 2831 (2002).

[5] S.K. Adhikari şi P. Muruganandam, J. Phys. B: At. Mol. Opt., **36**, 2501 (2003).

[6] A. Balaž, I. Vidanović, A. Bogojević, A Belić şi A. Pelster, J. Stat. Mech. P03004 (2011)

[7] A. Balaž, I. Vidanović, A. Bogojević, A. Belić şi A. Pelster, J. Stat. Mech. P03005 (2011)

[8] A. Balaz si A.I. Nicolin, Phys. Rev. A, **85**, 023613 (2012)

[9] S. N. Bose, Z. Phys., **26**, 178 (1924).

[10] R. M. Bradley, J. E. Bernard şi L. D. Carr, Phys. Rev. A, **77**, 033622 (2008).

[11] J.C. Bronski, L. D. Carr, B. Deconinck şi J.N. Kutz, Phys. Rev. Lett., **86,** 1402 (2001).

[12] J.C. Bronski, L. D. Carr, B. Deconinck, J.N. Kutz şi K. Promislow, Phys. Rev. E, **63,** 036612 (2001)

[13] J.C. Bronski, L. D. Carr, R. Carretero-González, B. Deconinck, J.N. Kutz şi K. Promislow, Phys. Rev. E, **64,** 056615 (2001)

[14] P. Capuzzi, M. Gattobigio şi P. Vignolo, Phys. Rev. A, **83**, 013603 (2011).

[15] P. Capuzzi şi P. Vignolo, Phys. Rev. A, **78**, 043613 (2008).

[16] R. Carretero-González, D.J. Frantzeskakis şi P.G. Kevrekidis, Nonlinearity, **21**, R139 (2008).

[17] S. Chu, Rev. Mod. Phys., **70**, 685 (1998).

[18] C. N. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys., **70**, 707 (1998,).

[19] F. Dalfovo, C. Minniti şi S. Stringari, Phys. Lett. A, **227**, 259 (1996).

[20] D. Diakonov, L.M. Jensen, C.J. Pethick şi H. Smith, Phys. Rev. A, **66**, 013604 (2002).

[21] P. Engels, C. Atherton şi M.A. Hoefer, Phys. Rev. Lett., **98**, 095301 (2007).

[22] E. Erdemir şi B. Tanatar, Physica A, **322**, 449 (2003).

[23] K.S. Fa, R.S. Mendes, P.R.B. Pedreira şi E.K. Lenzi, Physica A, **295**, 242 (2001).

[24] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London, **121**, 299 (1831).

[25] A.L. Fetter, J. Low. Temp. Phys., **106**, 643 (1997).

[26] D.J. Frantzeskakis, J. Phys. A: Math. Theor., **43**, 213001 (2010).

[27] J.J. García-Ripoll, V.M. Pérez-García şi P. Torres, Phys. Rev. Lett., **83**, 1715 (1999).

[28] N. Gemelke, E. Sarajlic, Y. Bidel, S. Hong şi S. Chu, Phys. Rev. Lett., **95**, 170404 (2005).

[29] C.D. Graf, G. Weick şi E. Mariani, EPL, **89**, 40005 (2010).

[30] M. Greiner, C. A. Regal şi D. S. Jin, Nature, **426**, 537 (2003).

[31] E. P. Gross, Nuovo Cim., **20**, 454 (1961).

[32] A. Gubeskys, B.A. Malomed şi I.M. Merhasin, Stud. Appl. Math., **115**, 255 (2005).

[33] G. W. Hill, Acta. Math., **8**, 1 (1886).

[34] E. L. Ince, Mon. Not. R. Astr. Soc., **LXXVI**, 431 (1916).

[35] E. L. Ince, *Ordinary dierential equations*, Dover Publications, New York (1944).

[36] Y.V. Kartashov, B.A. Malomed şi L. Torner, Rev. Mod. Phys., **83**, 247 (2011).

[37] N. Katz şi O. Agam, New J. Phys., **12**, 073020 (2010).

[38] M. Keceli, F. O. Ilday şi M. O. Oktel, Phys. Rev. A, **75**, 035601(2007).

[39] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys., **74**, 1131 (2002).

[40] M. Kramer, C. Tozzo şi F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **71**, 061602(R) (2005).

[41] E. Lundh, C.J. Pethick şi H. Smith, Phys. Rev. A, **55**, 2126 (1997).

[42] M. Machholm, C.J. Pethick şi H. Smith, **67**, 053613 (2003).

[43] M. Machholm, A. Nicolin, C.J. Pethick şi H. Smith, **69**, 043604 (2004).

[44] N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, New York (1951).

[45] M. Modugno, C. Tozzo şi F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **74**, 061601(R) (2006).

[46] O. Morsch şi M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys., **78**, 179 (2006).

[47] A. Muñoz Mateo şi V. Delgado, Phys. Rev. A, **75**, 063610 (2007).

[48] A. Muñoz Mateo şi V. Delgado, Phys. Rev. A, **77**, 013607 (2008).

[49] A. Muñoz Mateo şi V. Delgado, Ann. Phys., **324**, 709 (2009).

[50] P. Muruganandam şi S.K. Adhikari, Comp. Phys. Comm., **180**, 1888 (2009).

[51] R. Nath şi L. Santos, Phys. Rev. A, **81**, 033626 (2010).

[52] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **61**, 641 (2009).

[53] A.I. Nicolin, Phys. Rev. E, **84**, 056202 (2011).

[54] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **63**, 1329 (2011).

[55] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **63**, 187 (2011).

[56] A.I. Nicolin şi R. Carretero-González, Physica A, **387**, 6032 (2008).

[57] A.I. Nicolin, R. Carretero-González şi P.G. Kevrekidis, Phys. Rev. A, **76**, 063609 (2007).

[58] A.I. Nicolin, M.H. Jensen şi R. Carretero-González, Phys. Rev. E, **75**, 036208 (2007).

[59] A.I. Nicolin, M.H. Jensen, J.W. Thomsen şi R. Carretero-González, Physica D, **237**, 2476 (2008).

[60] A.I. Nicolin şi M.C. Raportaru, Physica A, **389**, 4663 (2010).

[61] A.I. Nicolin şi M.C. Raportaru, Proc. Romanian Acad. A, **12**, 209 (2011).

[62] S. Peil, J. V. Porto, B. Laburthe, J. M. Obrecht, B. E. King, M. Subbotin, S. L. Rolston şi W. D. Phillips, Phys. Rev. A, **67,** 051603(R) (2003).

[63] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein şi P. Zoller, Phys. Rev. Lett., **77**, 5320 (1996).

[64] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein şi P. Zoller, Phys. Rev. A, **56**, 1424 (1997).

[65] C.J. Pethick, H.S. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, (2008).

[66] W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).

[67] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **40**, 646 (1961).

[68] S.E. Pollack, D. Dries, R.G. Hulet, K.M.F. Magalhaes, E.A.L. Henn, E.R.F. Ramos, M.A. Caracanhas şi V.S. Bagnato, Phys. Rev. A, **81**, 053627 (2010).

[69] M.C. Raportaru, Rom. Rep. in Phys., **64**, 105(2012).

[70] Z. Rapti, P.G. Kevrekidis, A. Smerzi şi A. R. Bishop, Phys. Rev. E, **69**, 017601(2004).

[71] A. -M. Rey, P. B. Blakie şi C. W. Clark, Phys. Rev. A, **67**, 053610 (2003).

[72] L. Salasnich, A. Parola şi L. Reatto, Phys. Rev. A, **65**, 043614 (2002).

[73] L. Salasnich, Laser Phys., **12**, 198 (2002).

[74] L. Salasnich, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 335205 (2009)

[75] A. Smerzi şi A. Trombettoni, Chaos, **13**, 766 (2003)

[76] A. Smerzi şi A. Trombettoni, Phys. Rev. A, **68**, 023613 (2003).

[77] K. Staliunas, S. Longhi şi G.J. de Valcárcel, Phys. Rev. Lett., **89**, 210406 (2002)

[78] K. Staliunas, S. Longhi şi G.J. de Valcárcel, Phys. Rev. A, **70**, 011601(R) (2004).

[79] K. Staliunas, Phys. Rev. A, **84**, 013626 (2011).

[80] C. Sulem şi P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation*, Springer, New York (1999).

[81] R.A. Tang, H.C. Li şi J.K. Xue, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **44**, 115303 (2011).

[82] F. F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste (Tome III, Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune)*, Guathier-Villars, Paris (1894).

[83] C. Tozzo, M. Kramer şi F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **72**, 023613 (2005).

[84] T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys., **4**, 441(1971).

[85] T. Ueda, H. Abe, Y. Saitoh, R. Nomura şi Y. Okuda, J. Low Temp. Phys., **148**, 553 (2007).

[86] I. Vidanović, A. Balaž, H. Al-Jibbouri şi A. Pelster, Phys. Rev. A, **84**, 013618 (2011).

[87] E. T. Whittaker, Proc. Edinb. Math. Soc. **XXXII**, 75 (1914).

[88] E. T.Whittaker şi G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1952,).

[89] S. Wolfram, *The Mathematica book*, Wolfram Media, Cambridge (2003).

[90] B. Wu şi Q. Niu, Phys. Rev. A, **61**, 023402 (2000).

[91] B. Wu, R.B. Diener şi Q. Niu, Phys. Rev. A, **65**, 025601 (2002).