# STUDIUL COMPORTAMENTULUI NELINIAR ȘI STOHASTIC AL CONDENSATELOR BOSE-EINSTEIN

**TEZĂ DE DOCTORAT**

**- REZUMAT -**

Facultatea de Fizică, Universitatea din București

**Mihaela Carina RAPORTARU**

CONDUCĂTOR ŞTIINȚIFIC,

**PROF. UNIV. DR. VIRGIL BĂRAN**

**– 2012 –**

## Cuvânt introductiv

*Teza de față reflectă activitatea mea științifică din ultimii doi ani din cadrul Departamentul de Fizică Computațională și Tehnologii Informaționale (DFCTI) al Institutului de Fizică și Inginerie Nucleară Horia Hulubei și Centrului de Fizică Teoretică (CFT) al Facultății de Fizică a Universității București. Activitatea din cadrul CFT a fost coordonată de dl Prof. Univ. Dr. Virgil BĂRAN, coordonatorul științific al prezentei teze, în timp ce aceea din cadrul DFCTI a fost coordonată de dl Dr. Alexandru NICOLIN, alături de care am scris trei dintre articolele pe care se bazează teza. De-a lungul ultimilor doi ani am activat in cadrul mai multor proiecte de cercetare, cel mai important fiind proiectul IDEI Collective dynamics, dissipation and fragmentation in mesoscopic quantum systems coordonat de Prof. BĂRAN, proiect căruia îi sunt circumscrise majoritatea rezultatelor prezentate în această teză.*

*Un rol aparte în activitatea de cercetare l-au avut Prof. Univ. Dr. Ricardo CARRETERO-GONZÁLEZ de la Departamentul de Matematică și Statistică al Universității din California, San Diego, și Conf. Univ. Dr. Antun BALAŽ de la Institutul de Fizică din Belgrad. Prof. CARRETERO-GONZÁLEZ m-a introdus în teoria funcțiilor q-Gaussiene folosite în capitolele 3 și 4, fiind, de asemenea, o gazdă excelentă de-a lungul vizitei mele în San Diego, în timp ce cu Conf. Antun BALAŽ am avut bucuria de a discuta pe larg despre dinamica neliniară a condensatelor Bose-Einstein în cadrul întâlnirilor de la Belgrad și Trieste. La Belgrad discuțiile au avut loc în cadrul întâlnirii grupului de fizică computațională, în timp ce discuțiile de la Trieste au fost prilejuite de școala ICTP Advanced School on Scientific Software Development: Concept and Tools co-organizată de Conf. BALAŽ, fiind orientate cu precădere pe eficiența integratorilor simbolici. Mulțumesc, de asemenea, dl Dr. Anastas MISHEV de la Facultatea de Știința Calculatoarelor a Universității Sfinților Cyril și Methodius din Skopje cu care am purtat discuții extrem de rodnice asupra randamentului integratorilor simbolici atat la Skopje cât și în cadrul conferinței ICT Innovation 2012 din Ohrid.*

*În final, mulțumirile mele se îndreaptă către colegii din cadrul DFCTI alături de care lucrez de mai bine de cinci ani, în special către dl Dr. Mihnea Dulea, șeful departamentului, și către famila mea, care m-a susținut cu fermitate în inerentele momente de determinare scăzută.*

# Cuprins

1. Introducere ..... 2
   1.1 Condensate Bose-Einstein în gaze atomice ..... 4
   1.2 Ecuația Gross-Pitaevskii ..... 5
   1.3 Efecte stohastice în dinamica la temperatură finită ..... 7
2. Ecuațiile Schrödinger nepolinomiale ..... 10
   2.1 Regimul de densitate joasă ..... 10
   2.2 Regimul de densitate înaltă ..... 12
3. Unde de densitate ..... 14
   3.1 Tratament variațional ..... 14
   3.2 Rezultate numerice ..... 17
4. Concluzii ..... 20
Bibliografie ..... 21
Listă de publicații ..... 23

# 1. Introducere

Înțelegerea curentă a temperaturilor scăzute pornește de la experiența noastră de zi cu zi cu lumea exterioarî. Chiar dacă temperatura de îngheț este considerată scăzută de către marea majoritate, comportamentul sistemelor fizice aflate la această temperatură este încă unul clasic, fiind necesare temperaturi cu mult mai scăzute pentru a observa procese fizice calitativ diferite de cele clasice.

Istoria fenomenelor fizice observate la temperaturi foarte joase este una pasionantă și menționăm în acest sens observarea supraconductivității în 1911, în 1913 fiindu-i acordat premiul Nobel lui Heike Kamerlingh Onnes pentru investigațiile sale asupra proprietăților materiei la temperaturi scăzute care au dus printre altele la producerea heliului lichid urmează apoi obținerea a superfluidității $^4He$ în 1938 și cea a $^3He$ în 1972.

Apariția proceselor de răcire în cadrul cărora sunt folosite fascicule laser în 1980 marchează o nouă etapă în istoria fizicii temperaturilor scăzute și reprezintă primul pas semnificativ în vederea obținerii unui condensat Bose-Einstein atomic format dintr-un gaz bosonic diluat răcit la temperaturi de ordinul sutelor și zecilor de nanokelvini sub temperatura de tranziție.

Obținute experimental pentru prima dată în 1995 de către Eric Cornell și Carl Weiman de la University of Colorado, Boulder, și Wolfgang Ketterle de la Massachusetts Institute of Technology, condensatele Bose-Einstein au reprezentat multă vreme "Sfântul Graal" al fizicii experimentale. Prezicerea teoretică a condensării Bose-Einstein de către Satyendra Nath Bose [9] și Albert Einstein precede cu șapte decenii realizarea experimentală a acestei stări, existând foarte puține semne în această perioadă care să indice efervescența științifică actuală.

Creșterea explozivă a interesului asupra condensatelor Bose-Einstein este evidențiată atât de numărul mare de articole publicate în domeniu cât și de diversitatea cercetătorilor atrași de subiect. Astfel, fizicieni specializați în fizică nucleară, fizică atomică, optică cuantică, optică neliniară, fizica materiei condensate ș.a.m.d. încep studiul condensatelor Bose-Einstein atrași de flexibilitatea experimentală a sistemelor în care sunt obținute acestea și de acuratețea modelelor teoretice folosite în descrierea cantitativă a proprietăților acestor condensate.

La nivelul fundamental de înțelegere, condensarea Bose-Einstein reprezintă ocuparea *macroscopică* a stării cuantice de energie minimă. Numărul mic de atomi din condensatele Bose-Einstein de la mijlocul anilor '90 a ridicat uneori semne de întrebare asupra obținerii acestei noi stări a materiei (deoarece nu era evident din rezultatele experimentale că starea de energie minimă este ocupată macroscopic) și nu este lipsit de importanță faptul că dintre cele trei grupuri care au lucrat în vederea obținerii condensării Bose-Einstein doar două au primit cu premiul Nobel.

Când un gaz bosonic este răcit sub o temperatură critică $T_c$, o mare parte din bosoni condensează în starea cuantică cea mai joasă. Atomii la temperatura $T$ și cu masa $m$ pot fi considerați pachete cuantice de undă care au o întindere spațială de ordinul lungimii de undă termice de Broglie $\lambda_{dB} = \left(2\pi\hbar/mk_BT\right)^{1/2}$. Valorea lui $\lambda_{dB}$ reprezintă imprecizia în poziție asociată cu distribuția impusului termic și crește cu descreșterea temperaturii. Când atomii sunt răciți până la punctul în care $\lambda_{dB}$ este comparabil cu separarea interatomică, pachetele de undă atomică se suprapun și gazul începe să devină o "supă cuatincă" de particule care nu pot fi distinse. În acel moment bosonii suferă o tranziție de fază în sensul mecanicii cuantice și formează un condensat Bose-Einstein (Figura 1). Dacă atomii sunt fermioni, răcirea aduce treptat gazul

aproape de o “mare Fermi”, stare în care câte un fermion ocupă un nivel energetic pornind de la nivelul de energie minimă.

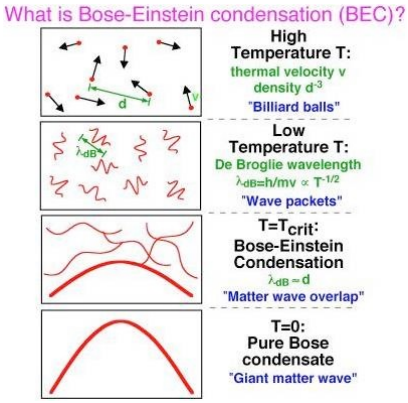


Figura 1: Formarea condensatelor Bose-Einstein**.** La temperaturi ridicate, un gaz bosonic se comportă clasic asemeni unui “sistem de bile de biliard”. La temperaturi scăzute atomii pot fi consideraţi pachete cuantice de undă care au o întindere spaţială de ordinul lungimii de undă termice de Broglie. Atunci când gazul este răcit sub o temperatură critică $T_c$ , o mare parte din atomi condensează în starea cuantică cea mai joasă. La $T = 0$ toţi bosonii sunt în starea de energie minimă şi formează un condensat Bose-Einstein perfect. Imaginea este preluată din Ref. [39].

Descrierea precedentă este departe de a fi corectă în ciuda aparentei simplităţi. Să ne gândim doar la faptul că, pe măsură ce descreştem temperatura, gazul trece, în principiu, printr-un proces de condensare clasică. Aceasta este însă evitată prin folosirea unor gaze de densităţi foarte scăzute, cam de o sută de mii de ori mai puţin dense decât densitatea aerului. În aceste condiţii timpul de formare a moleculelor devine de ordinul secundelor şi minutelor, acesta fiind proporţional cu inversul pătratului densităţii (a se vedea Ref. [65] pentru o discuţie detaliată). Vedem aşadar că principala problemă experimentală a fost aceea de a identifica un sistem atomic care putea rămâne gazos la temperaturi extrem de joase. Steve Chu spunea de altfel în 1994: “Pun pariu că Natura ascunde condensarea Bose-Einstein de noi. În ultimii 15 ani a făcut o treabă bună” [17].

Pentru răcirea unui gaz bosonic în vederea formării unui condensat Bose-Einstein sunt folosite în mod curent două metode distincte: răcirea cu laser şi răcirea prin evaporare. Răcirea prin evaporare este folosită în partea de prerăcire a gazului folosind un fascicol laser ai cărui fotoni preiau energie de la atomii “fierbinţi” în cadrul ciocnirilor foton-atom. Cea de-a doua metodă, răcirea prin evaporare, este folosită când gazul a fost deja prerăcit şi poate fi confinat într-o capcană magnetică. În lipsa capcanei, atomii deja prerăciţi s-ar lipi de suprafaţa microcontainerului în care sunt depozitaţi. Capcane magnetice similare celor folosite pentru condensatele Bose-Einstein sunt utilizate pentru confinarea plasmelor care nu sunt prea fierbinţi.

Principiul răcirii prin evaporare este unul extrem de intuitiv, aproape clasic. Astfel, aşa cum dintr-o ceaşcă aburindă de ceai sau de cafea (a se vedea Figura 2) se îndepărtează prin evaporare cele mai fierbinţi molecule, tot aşa dintr-un condensat Bose-Einstein vor “evada” doar acei atomi care au energie (şi deci temperatură) suficient de mare pentru a putea depăşi potenţialul extern. Toate schemele de răcire prin evaporare se bazează pe scăderea progresivă, foarte lentă a tăriei capcanei magnetice ce permite celor mai fierbinţi atomi să iasă din capcana magnetică, iar celor rămaşi să atingă echilibrul termic la o temperatură mai mică. Pentru acest ultim pas este necesar ca scăderea tăriei capcanei magnetice să fie una foarte înceată astfel încât

după evacuarea atomilor fierbinți cei rămași să aibă timpul necesar de a reatinge echilibrul termic.

Figure 2: Răcirea prin evaporare. Tot așa cum dintr-o ceașcă aburindă de ceai sau cafea sunt eliberate moleculele cele mai energetice (cele mai fierbinți) și dintr-un gaz bosonic necondensat prins într-o capcană magnetică evadează atomii cu temperatura cea mai mare.

În mod curent temperaturile la care se observă condensarea Bose-Einstein sunt de ordinul micro- și nanokelvinilor iar densitățile sunt de ordinul $10^4$-$10^5$ $cm^{-3}$. Funcție de simetria capcanei magnetice condensatul poate să fie sferic, puternic turtit (în formă de disc) sau puternic alungit (în formă de țigaretă). Ciclul de răcire necesar producerii unui condensat Bose-Einstein dura câteva minute la mijlocul anilor ’90, în timp ce acum, odată cu automatizarea tuturor proceselor, durează câteva secunde.

### 1.1 Condensate Bose-Einstein în gaze atomice

Prima problemă asociată condensării Bose-Einstein în gaze atomice este aceea a estimării temperaturii de tranziție și a numărului de atomi din condensat. Cantitățile relevante pentru această problemă sunt masa $m$ a particulei, numărul de particule pe unitatea de volum (notat de obicei cu $n$) și constanta lui Planck. Combinația $\hbar^2 n^{2/3}/m$ reprezintă o energie așa că valoarea acesteia împărțită la constanta Boltzman $k_B$ reprezintă o temperatură astfel încât temperatura de tranziție este scrisă în mod convențional sub forma

$$T_c = C\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B} \tag{1}$$

unde $C$ este un factor numeric. Putem înțelege calitativ formula de mai sus pornind de la faptul că tranziția spre starea condensată are loc atunci când unda de Broglie este comparabilă cu distanța medie dintre două particule. Stiind că

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}\right)^{1/2} \tag{2}$$

și că distanța medie dintre particule este de ordinul lui $n^{-1/3}$ obținem formula (1)

Un calcul mai rafinat asupra temperaturii de tranziție arată că pentru potențiale externe de forma

$$V(x_1,\ldots,x_d)=\sum_{j=1}^{d}\frac{m}{2}\omega_j^2 x_j^2 \tag{3}$$

temperatura critică este dată pentru un condensat tridimensional de

$$k_B T_c=\frac{\hbar\overline{\omega}N_p^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}}\approx 0.94\hbar\overline{\omega}N_p^{1/3}, \tag{4}$$

unde $\overline{\omega}=(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$.

### 1.2 Ecuația Gross-Pitaevskii

Ecuația standard folosită în studiul teoretic al condensatelor Bose-Einstein a fost propusă la începutul anilor ’60 de către Eugene Gross și Lev Pitaevskii în două articole independente publicate în “Nouvo Cimento” și “Sov. Phys. JEPT” (a se vede Refs. [31, 67]). Ecuații similare din punct de vedere matematic sunt folosite în descrierea dinamicii trenurilor de undă monocromatice ce se propagă în medii ușor neliniare, în descrierea dinamicii ușor neliniare a undelor ce se propagă la suprafața unui lichid și a oscilațiilor Langmuir (numite de asemenea și unde Langmuir) care apar în plasme nemagnetizate sau magnetizate ușor. Însă cea mai celebră ecuație înrudită cu ecuația Gross-Pitaevskii este ecuația Ginzburg-Landau folosită în anii ’50 în modelele de supraconductivitate [80].

Ecuația Gross-Pitaevskii este o ecuație Schrödinger neliniară ce descrie funcția de undă macroscopică a unui gaz condensat în sens Bose-Einstein. Pentru derivarea ei cel mai convenabil este să pornim de la Hamiltonianul multi-particulă a $N$ bosoni ce interacționează scris în a doua cuantificare. Considerând $m$ masa unui boson și $V_{ext}(\mathbf{r})$ potențialul în care aceștia sunt confinați iar $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ potențialul de interacție între doi bosoni, Hamiltonianul poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\int dr\,\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})\right]\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\\&+\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}',t)V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}',t)\hat{\psi}(\mathbf{r},t),\end{aligned} \tag{5}$$

unde $\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$ si $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ sunt operatori bosonici de câmp, de anihilare și respectiv creare.

Folosind ecuația Heisenberg

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=\left[\hat{\psi},\hat{H}\right] \tag{6}$$

avem:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})+\int d\mathbf{r}'\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}',t)V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}',t)\right)\hat{\psi}. \tag{7}$$

Subliniem că această ecuație este similară ecuației Schrödinger, însă $\hat{\psi}$ este un operator de câmp așa că pentru obținerea ecuației Schrödinger propriu-zise vom descompune operatorul de câmp sub forma

$$\hat{\psi}(\mathbf{r},t)=\psi(\mathbf{r},t)+\delta\hat{\psi}(\mathbf{r},t), \tag{8}$$

unde

$$\psi(\mathbf{r},t)=\langle\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{9}$$

este funcția de undă a condensatului și reprezintă valoarea medie a operatorului de câmp iar $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ descrie partea necondensată a gazului. Pentru temperaturi considerabil mai mici decât temperatura critică putem neglija ultimul termen din ecuația (8).

Pe lângă această simplificare vom presupune de asemenea că interacția dintre particule este interacție de contact astfel încât $V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=U\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ unde $U=4\pi\hbar^2 a/m$ iar $a$ este lungimea de împrăștiere între două particule.

Înlocuind în ecuația (7) $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ cu $\psi(\mathbf{r},t)$ și $V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ cu $U\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ se obține

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{ext}(\mathbf{r})+U|\psi|^2\right)\psi \tag{10}$$

care este ecuația Gross-Pitaevskii dependentă de timp.

Se observă relativ ușor că Lagrangianul clasic asociat ecuației (10) (adică acela scris folosind funcția de undă și nu operatorii de câmp) este dat de :

$$S=\int dtd\mathbf{r}\,\psi^*(\mathbf{r},t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\nabla^2-V(\mathbf{r})-\frac{UN|\psi(\mathbf{r},t)|^2}{2}\right)\psi(\mathbf{r},t) \tag{11}$$

Ecuația Gross-Pitaevskii propriu-zisă fiind obținută minimizând $S$ funcție de $\psi^*$, adică

$$\frac{\partial S}{\partial\psi^*}=0. \tag{12}$$

Pentru a obține forma independentă de timp a ecuației Gross-Pitaevskii putem folosi două abordări. Prima abordare pornește de la eliminarea termenului $\partial\psi/\partial t$ și introducerea unui multiplicator Lagrange $\mu$ (cu semnificație de potențial chimic), care asigură conservarea numărului mediu de particule, adică:

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi+V_{ext}(\mathbf{r})\psi+U|\psi|^2\psi=\mu\psi. \tag{13}$$

Subliniem că ecuația Gross-Pitaevskii este o ecuație neliniară cu derivate parțiale care necesită importante resurse de calcul pentru rezolvarea ei numericã. Pentru simplificarea investigațiilor asupra dinamicii condensatelor Bose-Einstein se deosebesc de obicei două

regimuri calitativ diferite: regimul de densitate scăzută și regimul de densitate înaltă (numit și Thomas-Fermi). În primul regim condensatul este ușor neliniar iar ecuația Gross-Pitaevskii poate fi rezolvată eficient folosind metode variaționale ce au la bază o funcție de undă test (ansatz) înrudită cu soluția ecuației Schrödinger liniare, în timp ce în al doilea regim este convenabilă utilizarea modelelor hidrodinamice și a calculelor variaționale ce folosesc funcții test *q*-Gaussiene.

### 1.3 Efecte stohastice în dinamica la temperatură finită

Discuția precedentă presupunea un condensat ideal la o temperatură foarte aproape de $0\,\mathrm{K}$ astfel încât efectele asociate cu interacția dintre partea necondensată a condensatului (așa-numitul nor termic) și atomii în stare condensată să poată fi neglijată. In această secțiune ne propunem să prezentăm pe scurt o abordare teoretică capabilă să descrie cuplajul dintre cele două componente menționate mai sus. În acest fel putem studia efecte ale norului termic asupra modurilor colective și regimului neliniar al condensatului. După cum vom vedea ciocnirile dintre atomii în stare condensată și cei necondensați modelate de o integrală de ciocnire de tip Boltzmann introduc efecte stohastice asupra dinamicii condensatului Bose-Einstein. Ideea cuplării unui condensat Bose-Einstein descris de o ecuație de tip Gross-Pitaevskii cu o ecuație de tip Boltzmann care descrie dinamica gazului Bose necondensat a fost discutată în detaliu în lucrările lui Zaremba *et al. [37, 38]*. Principala diferență între ecuația care descrie un condensat perfect și unul care interacționează cu norul termic este reprezentată de apariția unui termen suplimentar nehermitian care modelează schimbul de atomi de tip colizional dintre condensat și norul termic. Asfel, se obține:

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V_{ext}(r,t)+U\left|\phi(\mathbf{r},t)\right|^2+2\tilde{n}(\mathbf{r},t)-iR(\mathbf{r},t)\right]\phi(\mathbf{r},t), \tag{14}$$

unde $\tilde{n}(r,t)$ reprezintă densitatea locală a atomilor necondensați, care se poate obține pornind de la funcția de distribuție de un corp asociată cu aceștia:

$$\tilde{n}(\mathbf{r},t)=\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}f(\mathbf{p},\mathbf{r},t), \tag{15}$$

unde $f(p,r,t)$ reprezintă limita semiclasică a transformatei Wiegner a operatorului matricea densității. Fluxul net de particule $R(r,t)$

$$\begin{aligned}R(\mathbf{r},t)&=2\pi U^2\int\frac{d\mathbf{p_2}}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p_3}}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p_4}}{(2\pi\hbar)^3}\times\\&(2\pi\hbar)^3\delta(mv_c+\mathbf{p_2}-\mathbf{p_3}-\mathbf{p_4})\delta(\mathrm{E}_c+\tilde{\mathrm{E}}_2-\tilde{\mathrm{E}}_3-\tilde{\mathrm{E}}_4)\\&\times\left[f_2(f_3+1)(f_4+1)-(f_2+1)f_3f_4\right]\end{aligned} \tag{16}$$

poate fi înțeles pornind de la termenul de ciocnire $C_{12}[f]$

$$C_{12}[f]=\frac{4\pi}{\hbar}U^2|\phi|^2\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\times(2\pi\hbar)^3\delta(m\mathbf{v}_c+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\times\delta(\mathsf{E}_c+\widetilde{\mathsf{E}}_2-\widetilde{\mathsf{E}}_3-\widetilde{\mathsf{E}}_4)$$
$$\times(2\pi\hbar)^3\left[\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)-\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_3)-\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_4)\right]\times\left[(f_2+1)f_3f_4-f_2(f_3+1)(f_4+1)\right] \quad (17)$$

care apare în ecuația Boltzmann pentru norul termic

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f-(\nabla_{\mathbf{r}}\widetilde{V})\cdot\left(\nabla_{\mathbf{p}}f\right)=C_{12}[f]+C_{22}[f], \quad (18)$$

unde $\widetilde{V}(r,t)$ este câmpul mediu self-consistent. Mai precis

$$R(\mathbf{r},t)=\frac{\hbar}{\left|\phi(\mathbf{r},t)\right|^2}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}C_{12}\left[f(\mathbf{p},\mathbf{r},t)\right]. \quad (19)$$

În ecuația Boltzmann apare de asemenea rata de ciocniri binare dintre doi atomi necondensați ale căror stări finale corespund tot la doi atomi necondensați:

$$C_{22}[f]=\frac{4\pi}{\hbar}U^2\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi\hbar)^3}$$
$$\times(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\delta(\widetilde{\mathsf{E}}+\widetilde{\mathsf{E}}_2-\widetilde{\mathsf{E}}_3-\widetilde{\mathsf{E}}_4)$$
$$\left[(f+1)(f_2+1)f_3f_4-ff_2(f_3+1)(f_4+1)\right]. \quad (20)$$

Subliniem că spre deosebire de un gaz clasic sau de un sistem de fermioni care ascultă de principiul lui Pauli crearea unui atom într-o stare $j$ este asociată cu factorul statistic $(1+f_j)$, reflectând comportamentul "atractiv" al bosonilor, iar dispariția unui atom din starea $k$ este proporțional cu factorul statistic $f_k$. În cazul sistemelor de fermioni factorul statistic asociat cu apariția unui atom este de forma $(1-f_j)$ datorită blocajului de tip Pauli, astfel încât pentru $f_j=1$ starea să devină interzisă. Se observă că $C_{12}[f]$ depinde și de valoarea densității condensatului, fiind uneori notat $C_{12}[f,\phi]$, conservă energia și impulsul pentru fiecare eveniment de ciocnire. Este evident că $C_{12}[f]$ nu conservă numărul de atomi din condensat, acesta fiind în mod clar un efect stohastic care influențează dinamica părții condensate atunci când norul termic este semnificativ, datorită fluctuațiilor nedeterministe ale energiei și numărului de particule.

În integralele de ciocnire energia unui atom condensat este $\mathsf{E}_c$ iar impulsul său este $mv_c$, celelalte trei energii ($\widetilde{\mathsf{E}}$, $\widetilde{\mathsf{E}}_2$, $\widetilde{\mathsf{E}}_3$ si $\widetilde{\mathsf{E}}_4$) și impulsuri ($p$, $p_2$, $p_3$ si $p_4$) fiind asociate cu atomii necondensați implicați în ciocniri.

Este evident din ecuația cinetică pentru norul termic că integrala de ciocnire poate fi reprezentată ca efectul celor doi termeni $C_{12}[f]$ și $C_{22}[f]$ adică

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll}=C_{12}[f]+C_{22}[f]. \quad (21)$$

Pentru o descriere detaliată a seriei de aproximații care conduc la expresia ecuațiilor cinetice de mișcare și a integralelor de ciocnire pornind de la aproximații de tip Hartree-Fock se poate consulta Ref. [31].

În prezența câmpului mediu self-consistent și în absența ciocnirilor ecuația cinetică pentru norul termic devine o ecuație de tip Vlasov care a fost intensiv aplicată în studiul dinamicii de neechilibru în fizica plasmei, în studiul lichidelor Fermi (cum ar fi $^3He$), în studiul dinamicii electronilor în clusteri metalici și în fizica nucleară pentru a investiga modurile colective și cionirile cu ioni grei. Din punct de vedere numeric implementarea formalismului precedent pentru gaze bosonice foarte reci (parțial condensate) a fost realizată într-o serie de lucrări ale lui Zaremba *et al. [37, 38]*. În timp ce în formalismul acestora funcția de distribuție în spațiul fazelor a fost discretizată cu ajutorul functiilor $\delta$, noi propunem, inspirându-ne din aplicațiile de fizică nucleară, ca discretizarea lui $f$ să fie făcută folosind un sistem de funcții Gaussiene atât în spaþiul real cât și în spațiul impulsului, anume

$$f(r,p,t) = \frac{1}{N}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{(4\pi^2 w_r w_p)^{3/2}}$$
$$\times\sum_j^M \exp\left(-\frac{(r-r_j(t))^2}{2w_r}\right)\exp\left(-\frac{(p-p_j(t))^2}{2w_p}\right) \tag{22}$$

În expresia precedentă $N$ reprezintă numărul de particule test per atom, astfel încât $M$, numărul total de particule test, este egal cu $M = NN$, unde $N$ este numărul de atomi. Lățimile funcțiilor Gaussiene sunt date de $w_r$ și $w_p$ și se fixează cu respectarea relației de nedeterminare a lui Heisenberg și reproducerea unor proprietăți de echilibru self consistente. Avantajul funcțiilor Gaussiene constă în generarea unui profil de densitate neted pentru partea necondensată a gazului (chiar și cu puține particule test) ceea ce elimină unul din neajunsurile întâmpinate în abordarea originală.

Introducând această dezvoltare a funcției de distribuție se poate demonstra că ecuația cinetică este verificată dacă centroizii funcțiilor Gaussiene satisfac ecuațiile de mișcare de tip Hamilton de mai jos:

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} = \frac{p_j}{m} \tag{23}$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = -\nabla_{r_i}\widetilde{V}(r_j), \tag{24}$$

unde $\widetilde{V}(r_j)$ este câmpul mediu la nivelul centroidului Gaussienei $j$.

Rețeta numerică de rezolvare a ecuațiilor de mai sus este bine documentată în literatură și, așa cum au arătat studii din domeniul fizicii nucleare, este asigurată conservarea energiei pe scale de timp relevante pentru experimente. Metoda cuplării unei ecuații Gross-Pitaevskii disipative cu o ecuație cinetică pentru funcția de distribuție ce caracterizează norul termic este considerată una dintre cele mai puternice metode teoretice în domeniu și a fost folosită cu succes pentru studiul modurilor colective dipolare (oscilație în opoziție de fază a centrului condensatului în raport cu componenta necondensată), monopolare, quadrupolare și moduri de tip foarfecă (“scissor modes”).

Una din direcțiile de cercetare încă neexplorată suficient, ține de impactul norului termic asupra undelor longitudinale de densitate excitate în regimul puternic neliniar al unui condensat Bose-Einstein. În acest regim abordările menționate mai sus sunt fezabile în condiții de neechilibru și reprezintă instrumentul ideal de a studia fragmentarea condensatelor supuse la

excitații parametrice externe la temperatură finită recent observată experimental.

Pentru a demonstra utilitatea unei astfel de abordări menționăm în încheiere că acest model a reușit să explice corect direcția de deplasare a frecvenței modului dipolar spre deosebire de modelul hidrodinamic cu două fluide (un fluid pentru componenta condensată, un fluid pentru norul termic), care prezicea deplasarea frecvenței în sens opus față de frecvența modului în fază. De fapt, acest din urmă model nu permitea o schimbare în forma profilului de densitate al norului termic în mișcarea relativă la condensat, modificare pe care un tratament self-consistent o permite și are consecințe observabile. Această mișcare prezintă unele similarități cu aceea observată recent și în nucleele atomice bogate în neutroni (mișcare numită "rezonanță dipolară pygmy"), unde se consideră că "norul" neutronic poate să oscileze în opoziție de fază față de un sâmbure cu număr egal de protoni și neutroni.

# 2. Ecuațiile Schrödinger nepolinomiale

Specificul abordării variaționale din acest capitol rezidă în simplificarea dinamicii condensatului pe una din direcțiile capcanei folosind un ansatz Gaussian pentru regimul de densitate scăzuta și unul $q$-Gaussian pentru regimul de densitate mare.

## 2.1 Regimul de densitate joasă

Descrierea dinamicii axiale a unui condensat Bose-Einstein confinat de un potențial extern cu simetrie cilindrică a fost realizată cu ajutorul unei metode variaționale de către Salasnich *et al.* [72]. Punctul de pornire al tratamentului variațional este ecuația Gross-Pitaevskii tridimensională dependentă de timp care descrie funcția de undă macroscopică $\psi(\mathbf{r},t)$ a condensatului

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\mathbf{r})+UN|\psi(\mathbf{r},t)|^2\right]\psi(\mathbf{r},t), \tag{25}$$

unde $V(r)$ reprezintă potențialul extern al capcanei, $U=4\pi\hbar^2 a/m$ este amplitudinea de împrăștiere și $a$ este lungimea de împrăștiere între două particule, iar $N$ reprezintă numărul de bosoni condensați. Funcția de undă în acest caz este normată la 1, anume

$$\int d\mathbf{r}|\psi(\mathbf{r},t)|^2=1. \tag{26}$$

Așa cum am văzut în capitolele precedente, ecuația Gross-Pitaevskii tridimensională poate fi obținută folosind principiul acțiunii minime dacă este considerată ecuație Euler-Lagrange asociată cu următoarea funcțională de acțiune:

$$S=\int dtd\mathbf{r}\,\psi^*(\mathbf{r},t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-V(\mathbf{r})-\frac{1}{2}gN|\psi(\mathbf{r},t)|^2\right]\psi(\mathbf{r},t). \tag{27}$$

Potențialul extern este de forma $V(r)=\frac{1}{2}m\omega_{\perp}^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)+V(z)$ datorită simetriei cilindrice, iar $V(z)$ poate fi un potențial oarecare.

Pentru descrierea dinamicii colective a condensatelor Bose-Einstein se folosește în acest caz tehnica variațională cea mai simplă, bazată pe funcții Gaussiene, deoarece în limita unei amplitudini de împrăștiere nule acestea devin soluțiile exacte ale ecuației Schrödinger.

Funcționala de acțiune $S$ este simplificată folosind o funcție de undă de probă de forma:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\phi(x,y,t;\sigma(z,t))f(z,t) \tag{28}$$

unde atât $\phi$ cât și $f$ sunt normate la 1 iar $\phi$ este

$$\phi(x,y,t;\sigma(z,t))=\frac{\exp\left[\frac{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}{2\sigma(z,t)^{2}}\right]}{\pi^{1/2}\sigma(z,t)}. \tag{29}$$

Funcțiile variaționale $\sigma(z,t)$ și $f(z,t)$ sunt determinate prin minimizarea funcționalei de acțiune după calcularea integralelor în planul $(x,y)$. Pentru a calcula integralele precedente se presupune că funcția de undă transversală $\phi$ variază lent de-a lungul direcției axiale și se ia în considerare doar direcția transversală, adică $\nabla^{2}\phi;\nabla_{\perp}^{2}\phi$ unde $\nabla_{\perp}^{2}=\partial^{2}/\partial x^{2}+\partial^{2}/\partial y^{2}$. Introducând funcția de undă în ecuația (27) și integrând spațial după $x$ și $y$, funcționala de acțiune devine:

$$S=\int dtdzf^{*}(z,t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}-V(z)-\frac{1}{2}gN\frac{\sigma^{-2}}{2\pi}\left|f(z,t)\right|^{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\hbar^{2}}{2m}\sigma^{-2}-\frac{m\omega_{\perp}^{2}}{2}\sigma^{2}\right]f(z,t). \tag{30}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru $f^{*}$ și $\sigma$ sunt:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}+V(z)+gN\frac{\sigma^{-2}}{2\pi}\left|f(z,t)\right|^{2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\hbar^{2}}{2m}\sigma^{-2}+\frac{m\omega_{\perp}^{2}}{2}\sigma^{2}\right)\right]f(z,t) \tag{31}$$

$$\frac{\hbar^{2}}{2m}\sigma^{-3}-\frac{1}{2}m\omega_{\perp}^{2}\sigma+\frac{1}{2}gN\frac{\sigma^{-3}}{2\pi}\left|f(z,t)\right|^{2}=0 \tag{32}$$

Cea de-a doua ecuație este o ecuație algebrică care se poate rezolva analitic. Soluția obținută arată legătura între $\sigma$ și $f$, adică $\sigma^{2}=a_{\perp}^{2}\sqrt{1+2a_{s}N\left|f\right|}$ unde $a_{\perp}=\sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ este lungimea oscilatorului pe direcția transversală. În acest caz $\sigma$ depinde de $z$ și de $t$ din cauza dependenței

de timp și spațiu a lui $|f|^2$.

Acest rezultat este introdus în ecuația (31), obținându-se în final o ecuație de tip Schrödinger dependentă de timp care are structura nepolinomială:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)=\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+V(z)+\frac{gN}{2\pi a_\perp^2}\frac{|f^2(z,t)|}{\sqrt{1+2a_sN|f(z,t)|^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\hbar\omega_\perp}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2a_sN|f(z,t)|^2}}+\sqrt{1+2a_sN|f(z,t)|^2}\right)\right]f(z,t). \tag{33}$$

### 2.2 Regimul de densitate înaltă

Pentru un condensat Bose-Einstein în formă de țigaretă de densitate înaltă, metoda introdusă de Salasnich *et al.* [72, 74, 73] este lipsită de acuratețe datorită ansatzului Gaussian, însă se poate obține o ecuație nepolinomială similară folosind drept ansatz pentru componenta radială a funcției de undă funcția $q$-Gaussiană discutată în capitolul precedent. Punctul de pornire este ca și în secțiunea precedentă ecuația Gross-Pitaevkii și funcționala de acțiune asociată, a se vedea ecuațiile (25) și (27), cu observația că acum vom descompune funcția de undă sub forma

$$\psi(\mathbf{r},t)=\phi(r,t;a(z,t),q(z,t))f(z,t) \tag{34}$$

unde $\phi$ și $f$ reprezintă partea longitudinală și transversală a funcției de undă iar

$$\phi(r,t;a,q)=c\left(1-r^2a(1-q)\right)^{1/(1-q)} \tag{35}$$

cu $a$ și $q$ funcții de $z$ și de $t$. Acest ansatz are avantajul de a descrie la $q=1$ profilul radial de densitate mică folosit de Salasnich *et al*. [72, 74, 73], dar și de a reda ecuațiile hidrodinamice ale regimului Thomas-Fermi în vecinătatea lui $q=-1$ (a se vedea Ref. [56]). În cel de-al doilea caz ansatzul descrie atât partea centrală a condensatului cât și suprafața acestuia, ceea ce înseamnă că funcția și derivatele ei se integrează cu usurință și nu există nici o singularitate în energia cinetică a condensatului. Prin normarea ansatzului radial la 1 obținem:

$$c=\sqrt{\frac{a(3-q)}{\pi}}. \tag{36}$$

Presupunând că în secțiunea precedentă că funcția de undă transversală $\phi$ variază ușor de-a lungul direcției axiale față de direcția transversală, adică

$$\nabla^2\phi\approx\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{37}$$

și integrând în planul $(x,y)$, funcționala devine

$$S[f(z,t)] = \int dtdz f^*(z,t)\left[ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$$

$$\left. -\frac{gN|f(z,t)|^2}{2}\frac{a(q-3)^2}{\pi(5-q)} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2a(q-3)}{1+q} - \frac{m\omega_\perp^2}{2}\frac{1}{2a(2-q)}\right] f(z,t) \tag{38}$$

putând fi ușor minimizată. Se obțin astfel ecuațiile Euler-Lagrange pentru parametrii variaționali $\{f, f^*, a, q\}$. Vom avea:

$$i\hbar\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + gN|f(z,t)|^2\frac{a(q-3)^2}{\pi(5-q)}\right.$$

$$\left. + \frac{\hbar^2}{m}\frac{a(3-q)}{1+q} + \frac{m\omega_\perp^2}{4a(2-q)}\right] f(z,t) \tag{39}$$

pentru $f^*$ ( împreună cu conjugata complexă pentru $f$ ),

$$\frac{gN|f(z,t)|^2}{2\pi}\frac{(q-3)^2}{(5-q)} + \frac{\hbar^2}{m}\frac{(3-q)}{1+q} - \frac{m\omega_\perp^2}{4a^2(2-q)} = 0 \tag{40}$$

pentru $a$, și

$$\frac{gN|f(z,t)|^2}{2}\left(\frac{2a(q-3)}{\pi(5-q)} + \frac{a}{\pi}\frac{(q-3)^2}{(q-5)^2}\right) - \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{a(3-q)}{(1+q)^2} + \frac{a}{1+q}\right) + \frac{m\omega_\perp^2}{4a(2-q)^2} = 0 \tag{41}$$

pentru $q$. În timp ce ultimele două ecuații nu pot fi rezolvate analitic pentru o valoare arbitrară a lui $N$, se poate arăta că pentru $N >> 1$ avem

$$q \approx -1 + 3\left(\frac{2}{a_s|f(z,t)|^2 N}\right)^{1/3} \tag{42}$$

$$a \approx \frac{m\omega_\perp}{8\hbar\sqrt{a_s|f(z,t)|^2 N}} \tag{43}$$

În cele din urmă, folosind ecuațiile (39), (42) și (43) și neglijând termeni de $O(N^{-1/6})$ și mai mici, obținem:

$$i\hbar\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\hbar\omega_\perp\left[\sqrt{a_s|f(z,t)|^2 N} - \frac{2^{1/3}}{3}\left(a_s|f(z,t)|^2 N\right)^{1/6}\right]\right\} f(z,t). \tag{44}$$

# 3. Unde de densitate

În acest capitol vom studia apariția undelor de densitate în condensate Bose-Einstein forțate parametric. Motivați de rezultate experimentale recente vom analiza dinamica unui condensat de densitate mare în formă de țigaretă confinat într-o capcană magnetică a cărei componentă radială variază periodic în intensitate. Arătăm în acest capitol formarea undelor Faraday longitudinale pentru aproape orice frecvență a excitației externe a tăriei componentei radiale a capcanei magnetice. Pentru situația particulară a unei frecvențe a excitației externe egală cu frecvența componentei radiale a capcanei magnetice arătăm în acest capitol că undele longitudinale excitate sunt diferite de undele Faraday având o perioadă cu mult mai mică decât a acestora și o frecvență egală cu frecvența excitației externe.

În descrierea undelor de densitate vom utiliza o metodă variațională similară celor introduse în Capitolul 2 ce are la bază o funcție $q$-Gaussiană cu ajutorul căreia descriem componenta radială a funcției de undă. Unda propriu zisă de densitate este descrisă prin intermediul unei funcții cosinusoidale de tipul $(1+(u(t)+iv(t))\cos kz)$ altoită pe componenta radială a funcției de undă. De asemenea, vom folosi către finalul capitolului ecuația nepolinomială derivată în capitolul precedent pentru condensate de densitate înaltă pentru a arăta limitarea acestor ecuații care nu pot surprinde analitic nici formarea undelor Faraday în condensate fără omogenitate longitudinală, nici formarea undelor rezonante prin intermediul transferului de energie între modul radial și unda longitudinală.

## 3.1 Tratament variațional

Punctul de pornire al prezentului tratament variațional îl reprezintă densitatea Lagrangianului unui condensat Bose-Einstein prins în capcană magnetică

$$L(r,t)=\frac{i}{2}\left(\psi(r,t)\frac{\partial\psi^*(r,t)}{\partial t}-\psi^*(r,t)\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left|\nabla\psi(r,t)\right|^2$$
$$+\frac{1}{2}\left|\nabla\psi(r,t)\right|^2+V(r,t)\left|\psi(r,t)\right|^2+\frac{g(t)N}{2}\left|\psi(r,t)\right|^4 \tag{45}$$

în care vom folosi următoarea funcție de undă de probă

$$\psi(r,z,t)=\left[\frac{k(3-q)}{2\pi^2\left(2+u(t)^2+v(t)^2\right)w(t)^2}\right]^{1/2}\left[1-\frac{r^2(1-q)}{2w^2(t)}\right]^{11-q}$$
$$\times\exp\left(ir^2\alpha(t)\right)\left[1+\left(u(t)+iv(t)\right)\cos(kz)\right]. \tag{46}$$

Funcția de undă este compusă din: *i.*) o componentă radială $q$-Gaussiană care are ca parametrii variaționali lățimea radială a condensatului $w(t)$ și variabila $q$ care descrie curbura funcției de undă, *ii.*) o undă cosinusoidală de densitate care are ca parametrii variaționali partea reală $u(t)$ și cea imaginară $v(t)$ a amplitudinii, *iii.*) faza $\alpha(t)$ asociată lățimii radiale a condensatului și *iv.*) o funcție introdusă de condiția de normare

$$\int_{-\pi/k}^{\pi/k}dz\left|\psi(r,z,t)\right|^2=1. \tag{47}$$

Componenta radială a funcției de undă se poate integra relativ ușor folosind rutina

`Integrate` din MATHEMATICA, iar după efectuarea integrării longitudinale obținem următorul Lagrangian:

$$L(t)=-\frac{gkN(q-3)^2\left(8+3u^4(t)+8v^2(t)+3v^4(t)+6u^2(t)(4+v^2(t)\right)}{16\pi^2(q-5)\left(2+u^2(t)+v^2(t)\right)^2 w^2(t)}$$
$$+\frac{m\Omega^2(t)w^2(t)}{4-2q}+\frac{\hbar}{m}\left(\frac{k^2}{2}-\frac{1}{2+u^2(t)+v^2(t)}-\frac{q-3}{(1+q)w^2(t)}-\frac{4w^2(t)\alpha^2(t)}{q-2}\right)$$
$$+\frac{\hbar\left(-v(t)\dot{u}(t)+u(t)\dot{v}(t)\right)}{2+u^2(t)+v^2(t)}-\frac{\hbar w^2(t)\dot{\alpha}(t)}{q-2}. \tag{48}$$

Ansatz-ul nostru (și Lagrangianul asociat) este adecvat pentru condensate Bose-Einstein în formă de țigaretă omogene longitudinal. Tratamente mai fine includ o anvelopă longitudinală pentru cazul capcanelor longitudinale slabe care există în multe cazuri experimentale. În acest caz omitem însă anvelopa longitudinală (finită) datorită rezonanței false care apare între lungimea condensatului și perioada undei de suprafață. Aplicând ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \tag{49}$$

cu $y\in\{q,w,\alpha,v,u\}$ obținem următoarele ecuații pentru parametrii variaționali:

$$\frac{(7-q)(3-q)\rho g}{2\pi(q-5)^2}-\frac{4\hbar^2}{m(1+q)^2}+\frac{m\Omega^2(t)w^4(t)}{(q-2)^2}=0 \tag{50}$$

pentru $q$ și

$$\dot{\alpha}(t)=\frac{1}{2\hbar w(t)}(q-2)\left[\frac{g(q-3)^2\rho}{2\pi(q-5)w^3(t)}-\frac{m\Omega^2(t)w(t)}{q-2}\right.$$
$$\left.+\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{q-3}{(1+q)w^3(t)}-\frac{4w(t)\alpha^2(t)}{q-2}\right)\right] \tag{51}$$

$$\dot{w}(t)=\frac{2\hbar w(t)\alpha(t)}{m} \tag{52}$$

$$\dot{v}(t)=\frac{g(q-3)^2\rho u(t)}{\hbar\pi(q-5)w^2(t)}-\frac{\hbar k^2}{2m}u(t) \tag{53}$$

$$\dot{u}(t)=\frac{\hbar k^2}{2m}v(t) \tag{54}$$

pentru $w,\alpha$ ,$u$ și $v$, respectiv. Ecuațiile (51)-(54) descriu dinamica părții centrale și formarea undelor de densitate pentru un condensat arbitrar ales, distribuția densității radiale a părții centrale fiind controlatată de $q$ prin ecuația (50). Natura algebrică a ecuației (50) care stabilește distribuția densității radiale se datorează faptului că variabila $q$ nu are o variabilă canonică conjugată, variabilă pe care noi am omis-o intenționat din motive de maleabilitate analitică. De

fapt, cea mai mică modificare adusă ansatzului din ecuația (46) nu ne mai permite să calculăm analitic integralele transversale, caz în care rămanem cu metodele variaționale directe care au aceeași lipsă de transparență ca și soluțiile numerice ale ecuației Gross-Pitaevskii.

În afara rezonanței radiale, adică $\omega \neq \Omega$ , putem aproxima soluția ecuațiilor (51) și (52) prin

$$w(t) \approx \left[ \frac{\left(6-5q+q^2\right)\left(gm\rho(3+2q-q^2)+2\pi\hbar^2\left(5-q\right)\right)}{2\pi m^2\Omega^2\left(5+4q-q^2\right)\left(1+\varepsilon\sin t\omega\right)^2} \right]^{1/4} . \tag{55}$$

Folosind aproximația precedentă în ecuația care descrie dinamica lui $\dot{v}(t)$ putem rescrie ușor ecuațiile (53) și (54) sub forma ecuației Mathieu generale

$$\ddot{u}(t)+u(t)(a(k,\omega)+b(k,\omega)\sin 2\tau)=0 \tag{56}$$

unde

$$a(k,\omega)=\frac{k^2\hbar}{\omega^2 m}\left(\frac{k^2\hbar}{2m}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\rho g\Omega\left(q-3\right)^{3/2}}{\hbar(q-5)}\times\sqrt{\frac{(q-5)(1+q)}{\sqrt{(q-2)\left(gm\rho(q-3)(1+q)+2\pi\hbar^2(q-5)\right)}}}\right) \tag{57}$$

$$b(k,\omega)=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2mk^2\varepsilon g\rho\Omega\left(q-3\right)^{3/2}}{\omega^2\hbar(q-5)}\times\sqrt{\frac{(q-5)(1+q)}{(q-2)\left(gm\rho(q-3)(1+q)+2\pi\hbar^2(q-5)\right)}} \tag{58}$$

și $\omega t = 2\tau$ .

Undele observate experimental corespund celor mai instabile soluții ale ecuației (56). Vom arăta mai jos că pentru valori pozitive mici ale lui $b(k,\omega)$ aceste unde corespund lui $a(k,\omega)=1$ [44]. De asemenea, vom arăta mai jos că pentru valori mici ale lui $b(k,\omega)$ ecuația (56) are soluții de forma $\sin(\sqrt{a}\tau)$ și $\cos(\sqrt{a}\tau)$, așa că cele mai instabile soluții au o frecvență proprie egală cu jumătate din frecvența excitației externe. Aceste unde au o istorie lungă care merge înapoi la “frumoasele forme observate pe nisip, umpluturi, sau alte granule plasate pe plăci vibrante”, ale lui Ernst Chladni, “care sunt așa de uimitoare că rămân în mințile celor care le-au văzut”, la experimentele lui Hans Christian Ørsted cu pulberi ușoare de lycopodium, și “unduirile” lui Michael Faraday văzute în fluide în contact cu suprafețe vribrante [24]. Deoarece Michael Faraday a dedicat mai multe studii formării acestor unde/striații aducând contribuții substanțiale în domeniu, aceste unde/striații îi poartă acum numele. Exemplul tipic de formare a unei striații Faraday este următorul: se ia un vas umplut cu un strat subțire de lichid care este apoi pus in oscilație pe direcție verticală. Pentru amplitudini suficient de mari o instabilitate de undă de suprafață generează striații ce oscilează la o frecvență egală cu jumătate din frecvența de forțaj.

Unda Faraday este cea mai instabilă undă de densitate în afara rezonanței, dar în vecinătatea lui $\omega=\Omega$ aproximația pentru $w(t)$ nu funcționează, ecuația (56) include contribuția armonicilor superioare (de amplitudini foarte mici) și apare o undă de densitate diferită. Această undă de densitate apare datorită transferului rezonant de energie [58] între partea centrală a condensatului și unda de densitate, fiind necesar ca frecvența undei de densitate să fie egală cu

frecvența radială a capcanei magnetice, așadar $a(k,\omega)=2^2$.

Rezolvând analitic $a(k,\omega)=n^2$ găsim

$$\begin{aligned}k=&\Big\{\Big(\sqrt{2}g(3-q)^{3/2}\Omega\rho\sqrt{-H(q)(1+q)(g\rho(3-q)(q-1)+2\pi(q-5))}\\&-\Big\{(H(q)(g\rho(q-3)(1+q)+2\pi(q-5))(2g^2\Omega^2\rho^2(q-3)^3(1+q)\\&+gn^2\pi\rho\omega^2H(q)(q-3)(1+q)+2n^2\pi^2\omega^2(q-5)^2(q-2)\Big\}^{1/2}\Big)\Big\}^{1/2}\\&\times\left(\pi^{1/4}H(q)(g\rho(q-3)(1+q)+2\pi(q-5))\right)^{-1}\end{aligned}\tag{59}$$

unde $H(q)=(5-q)(2-q)$. Relații de dispersie similare au fost obținute în Ref. [57, 60] pentru unde Faraday (adică, $n=1$) prin perturbarea stării fundamentale a unui condensat Bose-Einstein în formă de țigaretă. Cea mai apropiată relație de dispersie de cea obținută mai sus este aceea obținută în Ref. [60], anume

$$\begin{aligned}k=&\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\omega_\perp m}{\hbar}}\Big\{2\gamma^{1/6}\left(2^{1/3}-9\gamma^{1/3}\right)\\&+\sqrt{4\gamma^{1/3}\left(2^{1/3}-9\gamma^{1/3}\right)^2+81\frac{\omega^2}{\omega_\perp^2}}\Big\},\end{aligned}\tag{60}$$

unde $\gamma$ este densitatea liniară a condesatului, deoarece atât tratamentul din acest capitol cât și acela din Ref. [60] folosesc o funcție $q$-Gaussiană pentru profilul radial de densitate. Aceste relații, totuși, se bazează pe o funcție de undă care nu este normată și care nu minimizează Lagrangianul, prin urmare rezultatele sunt puțin fortuite.

### 3.2 Rezultate numerice

Rezolvând numeric ecuațiile (51)-(54) folosind o metoda Runge-Kutta obținem dinamica centrului condensatului și cea a undei de densitate. Analizând

$$A(t)=n(0,t)-n\left(\frac{\pi}{k},t\right)\tag{61}$$

$$=\frac{4ku(t)}{\pi\left(2+u^2(t)+v^2(t)\right)}\tag{62}$$

unde

$$n(z,t)=\int_0^{\frac{\sqrt{2}w(t)}{\sqrt{1-q}}}dr\,2\pi r|\psi|^2\tag{63}$$

vedem că $u(t)$ este un bun indicator pentru formarea undelor de densitate. Prin urmare, pentru a analiza apariția undei Faraday și a celei rezonante reprezentăm grafic, în Figurile 3-6, $u(t)$ pentru două unde, chiar la sau în vecinătatea rezonanței radiale folosind o configurație experimentală reală cu $N=5\cdot10^5$ atomi de $^{87}Rb$, $L=180\mu m$, $\Omega=160.5(2\pi)$ $Hz$ și $\varepsilon=0.1$. Aceste valori corespund celor folosite în Ref. [21], cu diferența că aici am considerat pentru simplitate un condensat cu omogenitate longitudinală și am calculat întinderea condensatului folosind o aproximație Thomas-Fermi. Distribuția radială a fost determinată din soluția numerică

a ecuației (50) ce duce la o valoare de echilibru $q = 0.0822$ și care indică un regim de densitate înaltă pentru condensat [56].

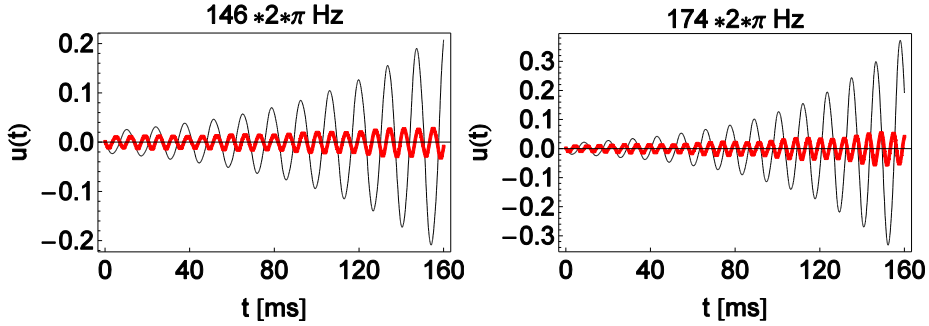


Figure 3: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday (reprezentată cu negru) și unda rezonantă (reprezentată cu roșu) în cazul experimental $N = 5 \cdot 10^5$ atomi de $^{87}Rb$, $L = 180\mu m$, $\Omega = 160.5(2\pi)$ $Hz$ și $\varepsilon = 0.1$ pentru $\omega = 146(2\pi)$ $Hz$ și $\omega = 174(2\pi)$ $Hz$ respectiv. De reținut în ambele figuri că unda Faraday apare considerabil mai repede decât unda rezonantă și prezintă o dezvoltare exponentială rapidă.

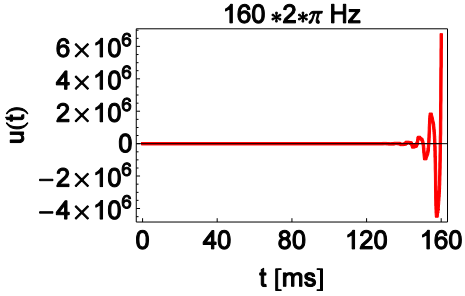


Figure 4: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday și unda rezonantă la frecvența $\omega = 160(2\pi)$ $Hz$. Aceleași setări experimentale ca mai sus. De reținut că unda rezonantă apare exponențial mai repede și ascunde complet unda Faraday. Acest comportament este tipic excitației externe rezonante și este datorat unui transfer rezonant de energie între modul colectiv al părții centrale și unda de suprafață emergentă.

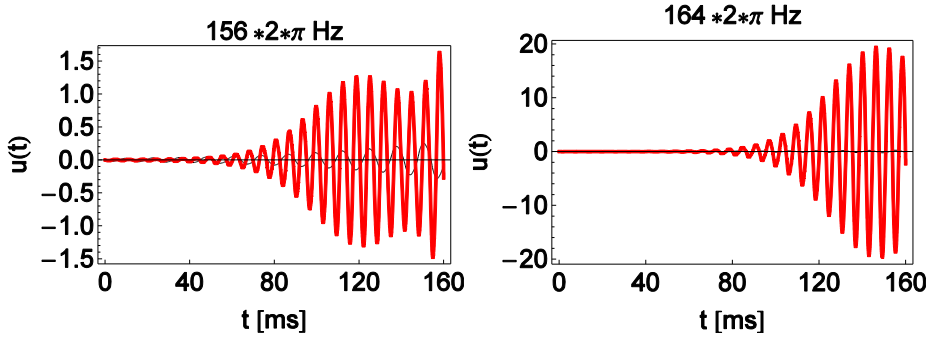


Figure 5: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday și rezonantă la $\omega = 156(2\pi)$ $Hz$ și $\omega = 164(2\pi)$ $Hz$ respectiv. Aceleași setări experimentale ca în Fig. 3. De reținut în ambele figuri că unda Faraday și rezonantă au instabilitate comparabilă în timp, chiar dacă unda rezonantă apare ceva mai repede. Cele două figuri aparțin datelor experimentale distribuite pentru perioada observată a undei de suprafață înainte și după rezonanță care au fost raportate în Ref. [21]

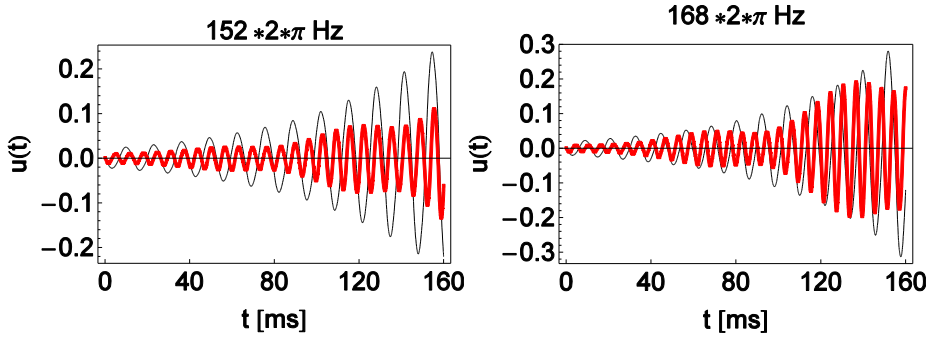


Figure 6: Dinamica lui $u(t)$ pentru unda Faraday şi unda rezonantă la $\omega = 152(2\pi)$ $Hz$ şi $\omega = 168(2\pi)$ $Hz$ respectiv. Aceleaşi setări experimentale ca în Fig. 3. De reţinut în ambele figuri că unda Faraday şi unda rezonantă au instabilitate asemănătoare în timp şi niciuna dintre unde nu are o explozie exponenţială.

Din figurile discutate se concluzionează că pentru frecvenţe de modulaţie diferite de frecvenţa capcanei radiale, undele Faraday apar mai repede decât cele rezonante, în timp ce chiar la rezonanţă unda rezonantă creşte exponenţial şi maschează unda Faraday. Într-o vecinătate a rezonanţei cele două sunt la fel de instabile. Calculând $s_F/s_R = k_R/k_F$ folosind ecuaţia (59), anume raportul dintre perioada undei Faraday şi cea a undei rezonante, se vede că pentru toate frecvenţele de interes perioada undei Faraday este de aproximativ de două ori cea a undei rezonante.

Să subliniem că modelul nostru nu descrie interacţiunea reală dintre cele două unde ci doar surprinde formarea de unde de densitate individuale. De fapt, datele experimentale împrăştiate raportate în Ref. [21] pentru perioada observată a undei de densitate înainte şi după rezonanţă arată coexistenţa celor două unde, în timp ce modelul nostru arată doar că cele două unde au instabilităţi asemănătoare în timp. Un model mai precis ar trebui să includă două unde de densitate de perioade arbitrare, dar un astfel de model duce la o ecuaţie de tipul Whittaker-Hill pentru care exponenţii Floquet (şi apoi soluţiile instabile) nu sunt cunoscuţi analitic. Modelul variaţional actual reprezintă un compromis între tractabilitatea analitică a unei componente a undei de densitate şi descrierea exactă a dinamicii centrului condensatului.

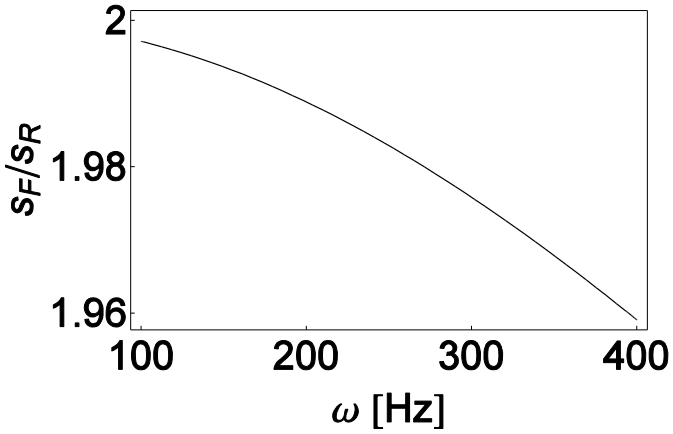


Figura 7: Perioada undei de densitate funcţie de frecvenţa excitaţiei externe. Punctele experimentale şi curbele teoretice ce urmează trendul descendent corespund undei Faraday în timp ce punctele izolate în jurul frecveţei $160.5(2\pi)$ Hz corespund undei rezonante. Relaţiile de dispersie obţinute în Refs. [57, 60] reproduc la nivel calitativ datele experimentale aferente undei Faraday (a se vedea curbele de culoare negră, roşie, verde şi albastră), însă numai modelul variaţional prezentat în acest capitol reproduce şi unda rezonantă (a se vede puntul negru).

Prezentăm în cele din urmă în Figura 7 dependența perioadei undei de densitate de frecvența excitației externe, incluzând în Figura 7 atât rezultatele obținute din relațiile de dispersie ale ecuațiilor nepolinomiale din Refs. [57, 60] cât și relația de dispersie din ecuația (59). Observăm că toate relațiile de dispersie obținute reproduc cu acuratețe relativ bună perioada undei Faraday însă numai tratamentul variațional introdus în Ref. [69] și prezentat pe larg la începutul acestui capitol reproduce cu acuratețe unda rezonantă.

# 4. Concluzii

În această teză am investigat prin mijloace analitice dinamica neliniară a unor condensate Bose Einstein în formă de țigaretă. Primul nostru obiectiv a fost acela de a obține o ecuație unidimensională capabilă să descrie dinamica unor condensate tridimensionale puternic alungite supuse la modulații periodice ale componentei transversale a capcanei magnetice. Al doilea obiectiv al tezei a fost acela de a oferi un tratament variațional precis pentru undele de densitate ce apar în condensate cuasi-unidimensionale datorită modulațiilor periodice ale tăriei capcanei magnetice.

În derivarea ecuației nepolinomiale din Capitolul 2 am folosit procedura variațională standard arătând că ecuațiile nepolinomiale curente obținute în ipoteza unui condensat de densitate scăzută pot fi generalizate cu succes pentru condensate de densitate înaltă folosind un ansatz radial $q$-Gaussian.

Principalul dezavantaj al ecuațiilor nepolinomiale este acela cã ele nu surprind cuplajul dintre modurile transversale și cele longitudinale. Datele experimentale ale lui Engel *et al.* [21] relevă un asemenea comportament rezonant care nu poate fi surprins cu ajutorul ecuației din Capitolul 3. Din acest motiv am prezentat în detaliu în Capitolul 4 un tratament variațional elaborat anume pentru condensate de densitate înaltă care permite descrierea simultană a modurilor colective ale condensatului și a undelor longitudinale de densitate. Cu ajutorul acestui calcul variațional am investigat competiția dintre undele de densitate ce pot fi excitate de către modulațiile tăriei transversale a capcanei magnetice. Principalul nostru rezultat este că pentru frecvențe ale excitației externe diferite de frecvența radială de confinare unda excitată are o frecvență intrinsecă egală cu jumătate din frecvența excitației externe (unda Faraday), apărând mai rapid decât toate celelalte unde de densitate.

# Bibliografie


[1] H. Abe, T. Ueda, M. Morikawa, Y. Saitoh, R. Nomura și Y. Okuda, Phys. Rev. E, **76**, 046305 (2007).
[2] S.K. Adhikari, Phys. Rev. E, **62**, 2937 (2000).
[3] S.K. Adhikari, Phys. Lett. A, **265**, 91 (2000).
[4] S.K. Adhikari și P. Muruganandam, J. Phys. B: At. Mol. Opt., **35**, 2831 (2002).
[5] S.K. Adhikari și P. Muruganandam, J. Phys. B: At. Mol. Opt., **36**, 2501 (2003).
[6] A. Balaž, I. Vidanović, A. Bogojević, A Belić și A. Pelster, J. Stat. Mech. P03004 (2011)
[7] A. Balaž, I. Vidanović, A. Bogojević, A. Belić și A. Pelster, J. Stat. Mech. P03005 (2011)
[8] A. Balaz și A.I. Nicolin, Phys. Rev. A, **85**, 023613 (2012)
[9] S. N. Bose, Z. Phys., **26**, 178 (1924).
[10] R. M. Bradley, J. E. Bernard și L. D. Carr, Phys. Rev. A, **77**, 033622 (2008).
[11] J.C. Bronski, L. D. Carr, B. Deconinck și J.N. Kutz, Phys. Rev. Lett., **86,** 1402 (2001).
[12] J.C. Bronski, L. D. Carr, B. Deconinck, J.N. Kutz și K. Promislow, Phys. Rev. E, **63,** 036612 (2001)
[13] J.C. Bronski, L. D. Carr, R. Carretero-González, B. Deconinck, J.N. Kutz și K. Promislow, Phys. Rev. E, **64,** 056615 (2001)
[14] P. Capuzzi, M. Gattobigio și P. Vignolo, Phys. Rev. A, **83**, 013603 (2011).
[15] P. Capuzzi și P. Vignolo, Phys. Rev. A, **78**, 043613 (2008).
[16] R. Carretero-González, D.J. Frantzeskakis și P.G. Kevrekidis, Nonlinearity, **21**, R139 (2008).
[17] S. Chu, Rev. Mod. Phys., **70**, 685 (1998).
[18] C. N. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys., **70**, 707 (1998,).
[19] F. Dalfovo, C. Minniti și S. Stringari, Phys. Lett. A, **227**, 259 (1996).
[20] D. Diakonov, L.M. Jensen, C.J. Pethick și H. Smith, Phys. Rev. A, **66**, 013604 (2002).
[21] P. Engels, C. Atherton și M.A. Hoefer, Phys. Rev. Lett., **98**, 095301 (2007).
[22] E. Erdemir și B. Tanatar, Physica A, **322**, 449 (2003).
[23] K.S. Fa, R.S. Mendes, P.R.B. Pedreira și E.K. Lenzi, Physica A, **295**, 242 (2001).
[24] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London, **121**, 299 (1831).
[25] A.L. Fetter, J. Low. Temp. Phys., **106**, 643 (1997).
[26] D.J. Frantzeskakis, J. Phys. A: Math. Theor., **43**, 213001 (2010).
[27] J.J. García-Ripoll, V.M. Pérez-García și P. Torres, Phys. Rev. Lett., **83**, 1715 (1999).
[28] N. Gemelke, E. Sarajlic, Y. Bidel, S. Hong și S. Chu, Phys. Rev. Lett., **95**, 170404 (2005).
[29] C.D. Graf, G. Weick și E. Mariani, EPL, **89**, 40005 (2010).
[30] M. Greiner, C. A. Regal și D. S. Jin, Nature, **426**, 537 (2003).
[31] A. Griffin, T. Nikuni și E. Zaremba, Bose-condensed gases at finite temperatures, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
[32] E. P. Gross, Nuovo Cim., **20**, 454 (1961).
[33] A. Gubeskys, B.A. Malomed și I.M. Merhasin, Stud. Appl. Math., **115**, 255 (2005).
[34] G. W. Hill, Acta. Math., **8**, 1 (1886).

[35] E. L. Ince, Mon. Not. R. Astr. Soc., **LXXVI**, 431 (1916).
[36] E. L. Ince, *Ordinary dierential equations*, Dover Publications, New York (1944).
[37] B. Jackson şi E. Zaremba, Laser Phys., 12, 93 (2002).
[38] B. Jackson şi E. Zaremba, Phys., Rev. A, 66, 033606 (2002).
[39] Y.V. Kartashov, B.A. Malomed și L. Torner, Rev. Mod. Phys., **83**, 247 (2011).
[40] N. Katz și O. Agam, New J. Phys., **12**, 073020 (2010).
[41] M. Keceli, F. O. Ilday și M. O. Oktel, Phys. Rev. A, **75**, 035601(2007).
[42] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys., **74**, 1131 (2002).
[43] M. Kramer, C. Tozzo și F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **71**, 061602(R) (2005).
[44] E. Lundh, C.J. Pethick și H. Smith, Phys. Rev. A, **55**, 2126 (1997).
[45] M. Machholm, C.J. Pethick și H. Smith, **67**, 053613 (2003).
[46] M. Machholm, A. Nicolin, C.J. Pethick și H. Smith, **69**, 043604 (2004).
[47] N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, New York (1951).
[48] M. Modugno, C. Tozzo și F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **74**, 061601(R) (2006).
[49] O. Morsch și M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys., **78**, 179 (2006).
[50] A. Muñoz Mateo și V. Delgado, Phys. Rev. A, **75**, 063610 (2007).
[51] A. Muñoz Mateo și V. Delgado, Phys. Rev. A, **77**, 013607 (2008).
[52] A. Muñoz Mateo și V. Delgado, Ann. Phys., **324**, 709 (2009).
[53] P. Muruganandam și S.K. Adhikari, Comp. Phys. Comm., **180**, 1888 (2009).
[54] R. Nath și L. Santos, Phys. Rev. A, **81**, 033626 (2010).
[55] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **61**, 641 (2009).
[56] A.I. Nicolin, Phys. Rev. E, **84**, 056202 (2011).
[57] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **63**, 1329 (2011).
[58] A.I. Nicolin, Rom. Rep. Phys., **63**, 187 (2011).
[59] A.I. Nicolin și R. Carretero-González, Physica A, **387**, 6032 (2008).
[60] A.I. Nicolin, R. Carretero-González și P.G. Kevrekidis, Phys. Rev. A, **76**, 063609 (2007).
[61] A.I. Nicolin, M.H. Jensen și R. Carretero-González, Phys. Rev. E, **75**, 036208 (2007).
[62] A.I. Nicolin, M.H. Jensen, J.W. Thomsen și R. Carretero-González, Physica D, **237**, 2476 (2008).
[63] A.I. Nicolin și M.C. Raportaru, Physica A, **389**, 4663 (2010).
[64] A.I. Nicolin și M.C. Raportaru, Proc. Romanian Acad. A, **12**, 209 (2011).
[65] S. Peil, J. V. Porto, B. Laburthe, J. M. Obrecht, B. E. King, M. Subbotin, S. L. Rolston și W. D. Phillips, Phys. Rev. A, **67,** 051603(R) (2003).
[66] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein și P. Zoller, Phys. Rev. Lett., **77**, 5320 (1996).
[67] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein și P. Zoller, Phys. Rev. A, **56**, 1424 (1997).
[68] C.J. Pethick, H.S. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, (2008).
[69] W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).
[70] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **40**, 646 (1961).
[71] S.E. Pollack, D. Dries, R.G. Hulet, K.M.F. Magalhaes, E.A.L. Henn, E.R.F. Ramos, M.A. Caracanhas și V.S. Bagnato, Phys. Rev. A, **81**, 053627 (2010).

[72] M.C. Raportaru, Rom. Rep. in Phys., **64**, 105(2012).
[73] Z. Rapti, P.G. Kevrekidis, A. Smerzi și A. R. Bishop, Phys. Rev. E, **69**, 017601(2004).
[74] A. -M. Rey, P. B. Blakie și C. W. Clark, Phys. Rev. A, **67**, 053610 (2003).
[75] L. Salasnich, A. Parola și L. Reatto, Phys. Rev. A, **65**, 043614 (2002).
[76] L. Salasnich, Laser Phys., **12**, 198 (2002).
[77] L. Salasnich, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 335205 (2009)
[78] A. Smerzi și A. Trombettoni, Chaos, **13**, 766 (2003)
[79] A. Smerzi și A. Trombettoni, Phys. Rev. A, **68**, 023613 (2003).
[80] K. Staliunas, S. Longhi și G.J. de Valcárcel, Phys. Rev. Lett., **89**, 210406 (2002)
[81] K. Staliunas, S. Longhi și G.J. de Valcárcel, Phys. Rev. A, **70**, 011601(R) (2004).
[82] K. Staliunas, Phys. Rev. A, **84**, 013626 (2011).
[83] C. Sulem și P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation*, Springer, New York (1999).
[84] R.A. Tang, H.C. Li și J.K. Xue, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **44**, 115303 (2011).
[85] F. F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste (Tome III, Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune)*, Guathier-Villars, Paris (1894).
[86] C. Tozzo, M. Kramer și F. Dalfovo, Phys. Rev. A, **72**, 023613 (2005).
[87] T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys., **4**, 441(1971).
[88] T. Ueda, H. Abe, Y. Saitoh, R. Nomura și Y. Okuda, J. Low Temp. Phys., **148**, 553 (2007).
[89] I. Vidanovi c′, A. Balaž, H. Al-Jibbouri și A. Pelster, Phys. Rev. A, **84**, 013618 (2011).
[90] E. T. Whittaker, Proc. Edinb. Math. Soc. **XXXII**, 75 (1914).
[91] E. T.Whittaker și G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1952,).
[92] S. Wolfram, *The Mathematica book*, Wolfram Media, Cambridge (2003).
[93] B. Wu și Q. Niu, Phys. Rev. A, **61**, 023402 (2000).
[94] B. Wu, R.B. Diener și Q. Niu, Phys. Rev. A, **65**, 025601 (2002).

# Listă de publicații

• Alexandru I. Nicolin, Mihaela Carina Raportaru*, Faraday waves in high-density cigar-shaped Bose-Einstein condensates,* Physica A,Volume 389, Issue 21, p. 4663-4667 ( 2010) **AIS=0.5204** (cf. www.eigenfactor.org)

• Alexandru I. Nicolin, Mihaela-Carina Raportaru*, Faraday waves in one-dimensional Bose-Einstein condesates,* Proceedings of the Romanian Academy, Series A,Volume 12, Number 3/2011, pp. 209–211

• Mihaela-Carina Raportaru, *Formation of Faraday and resonant waves in driven Bose-Einstein Condensates,* Romanian Reports in Physics, vol. 64, No.1, p. 105-115 (2012) **AIS=0.2012** (cf. www.eigenfactor.org)

• Mihaela-Carina Raportaru, Alexandru I. Nicolin, *Nonlinear dynamics of Bose-Einstein condensates by means of symbolic computations, ICT Innovations Conference Web Proceedings, accepted*